競技プログラミング・外典

A+Bから始める異常高速化

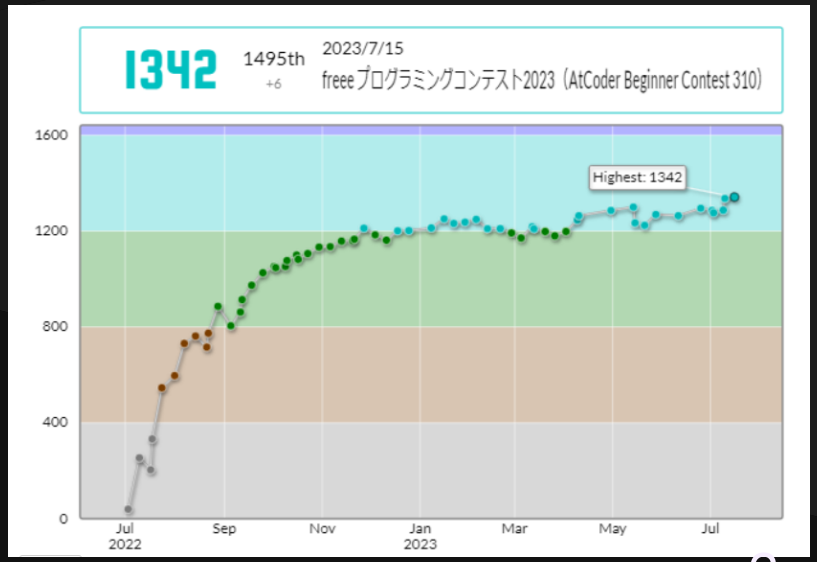
～競プロ向け標準入出力周りの高速化研究～

ComputerScience集会#4 @VRChat 2023-07-18

Mizar/みざー <http://github.com/mizar>

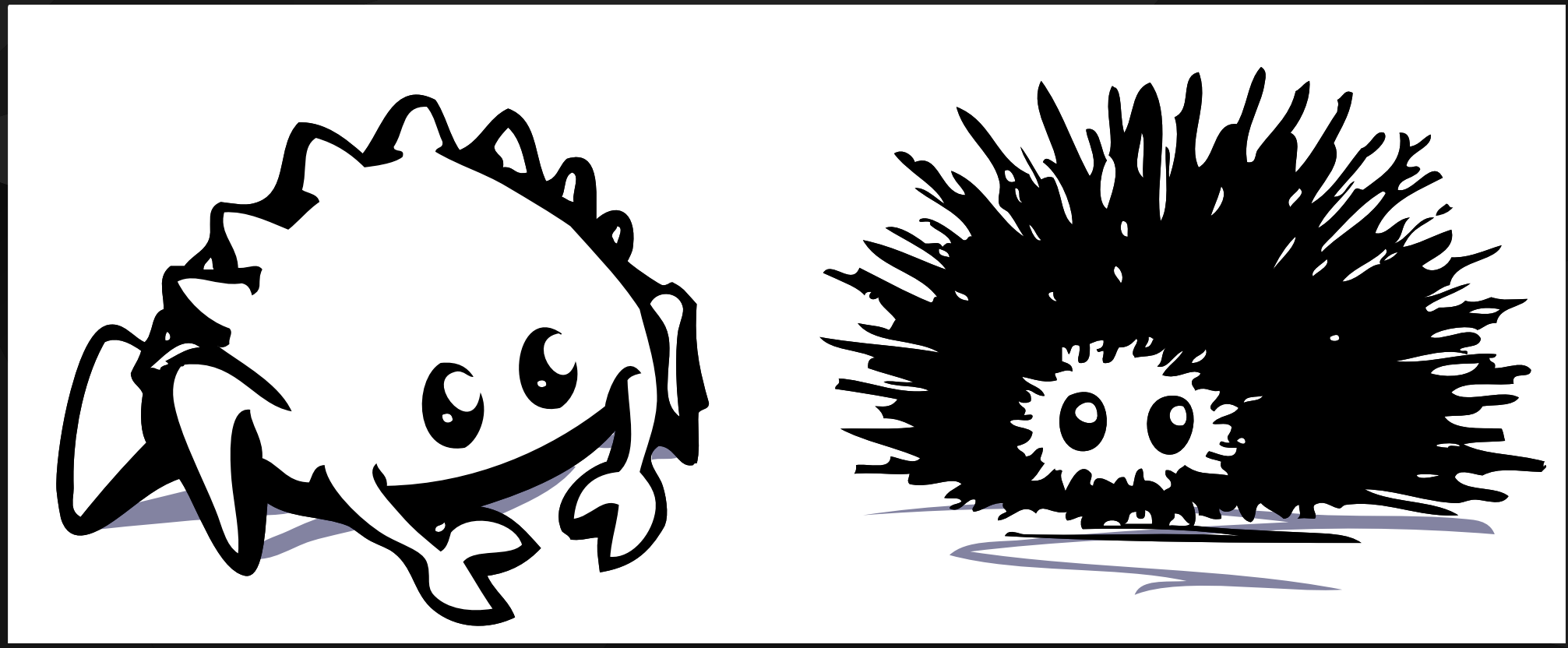
自己紹介

- Mizar/みざー
- VRChatは 2020年5月より
- 2022年から競技プログラミング始めました
  - AtCoderレーティング Algorithm:水色(最高値:1342), Heuristic:水色(1298)
  - Rust を主な使用言語として参加
  - 毎週土曜日(稀に日曜日)21:00~22:40開催の AtCoder Beginner Contest (ABC) に参加
  - ABC 終了後 23時頃~ VRC競プロ部 で集まって ABC感想会をしています
- 過去のTalk: 2022-09-23, 2022-09-25 「64bit数の素数判定」@理系集会Prime など



Caution: Unsafe Rust

この発表にはアンセーフなコードを含みます。使用する場合は自己責任でどうぞ。



画像: The Rustonomicon: Meet Safe and Unsafe より
Rust 裏本 (Rustonomicon 日本語訳) https://doc.rust-jp.rs/rust-nomicon-ja/

偉大なる先人は言いました (1)

> Rules of Optimization:
> ソフトウェア最適化の原則:
>
> Rule 1: Don't do it.
> 第一法則：最適化するな。
>
> Rule 2 (for experts only): Don't do it yet.
> 第二法則（上級者限定）：まだするな。

-- Michael A. Jackson. Principles of Program Design, Academic Press, 1975
-- 鳥居宏次訳, “構造的プログラム設計の原理,” 日本コンピュータ協会, 1980.

偉大なる先人は言いました (2)

> Programmers waste enormous amounts of time thinking about, or worrying about, the speed of non critical parts of their programs, and these attempts at efficiency actually have a strong negative impact when debugging and maintenance are considered. We should forget about small efficiencies, say about 97% of the time: premature optimization is the root of all evil.
>
> プログラマーは、プログラムの重要でない部分のスピードについて考えたり、悩んだりすることに膨大な時間を浪費している。そして、こうした効率化の試みは、デバッグやメンテナンスのことを考えると、実際には強い悪影響を及ぼす。小さな効率性、例えば97%程度の効率性については忘れるべきだ：時期尚早の最適化は諸悪の根源である。

-- Donald E. Knuth. 1974. Structured Programming with go to Statements. ACM Comput. Surv. 6, 4 (Dec. 1974), 261–301.

Caution: 邪道な高速化の世界へようこそ

競技プログラミングの楽しみ方としては、本質から外れた、実行時間を可能な限り削るための小手先の工夫になります。今回の物も自分の趣味色が強い実装なので、AtCoder上での利用を想定した `proconio` クレートなどへ取り込まれる事も恐らく無いかと思います。

競技プログラミングの問題の実行時間は、典型的には 2000ms 程度が許されていますが、通常の問題では 10ms 程度の影響も出ることのない範囲です。

逆に、入出力で 0.1ms でもプログラムの実行時間を削りたい人、低レイヤー寄りの高速化に興味のある人は、是非挑戦してみてください。

今回扱う問題は、入出力の量が特に多く、実行時間の入出力部分への影響が比較的大きいものになります。（作問側の想定としても、入出力テストのための問題の一つと位置づけられているようです）

A+Bから始める異常高速化

Library Checker: Many A + B (128bit) https://judge.yosupo.jp/problem/many_aplusb_128bit

問題文: この問題は T ケースあります。 整数 A, B が与えられます。 $A + B$ を出力してください。
制約: $1 \leq T \leq 500000, \quad -10^{37} \leq A, B \leq 10^{37}$

(参考: $2^{123} = 10633823\ 9662793269\ 8323045648\ 2242756608$)

入力

“
T
$A\ B$
$A\ B$
$\vdots$
$A\ B$
”

出力

“
$A + B$
$A + B$
$\vdots$
$A + B$
”

サンプル (上段: 入力サンプル、下段: 出力サンプル)

```
5
1 2
11 22
-111 -222
100000000000000000000000000000000000 100000000000000000000000000000000000
123456789012345678901234567890123456 -100000000000000000000000000000000000
```

```
3
33
-333
200000000000000000000000000000000000
-876543210987654321098765432109876543
```

A+Bから始める異常高速化

CASE 1: 出力回数が多い時に毎回 `println!` すると遅いです : 実行時間 537ms :
https://judge.yosupo.jp/submission/149768
`println!` は毎回OSに出力を行うため、OSくんを50万回呼びつける人状態になります。

```rust
use std::io::prelude::*;
fn main() {
    let stdin = std::io::stdin();
    let mut lines = stdin.lock().lines();
    let n = lines.next().unwrap().unwrap().parse::<usize>().unwrap();
    for _ in 0..n {
        let s = lines.next().unwrap().unwrap();
        let mut token = s.split_ascii_whitespace();
        let a = token.next().unwrap().parse::<i128>().unwrap();
        let b = token.next().unwrap().parse::<i128>().unwrap();
        println!("{}", a + b); // 500000回出力するのに毎回println!は…
    }
}
```

A+Bから始める異常高速化

CASE 2: 出力回数が多い時は `Write` システムコール呼び出し回数の低減に `BufWriter` を使いましょう (`proconio` クレートの `#[fastout]` はこれに相当) : 実行時間 222ms : https://judge.yosupo.jp/submission/149239

```rust
use std::io::prelude::*;
fn main() {
    let (stdin, stdout) = (std::io::stdin(), std::io::stdout());
    let mut lines = stdin.lock().lines();
    let mut writer = std::io::BufWriter::new(stdout.lock()); // 出力バッファ
    let n = lines.next().unwrap().unwrap().parse::<usize>().unwrap();
    for _ in 0..n {
        let s = lines.next().unwrap().unwrap();
        let mut token = s.split_ascii_whitespace();
        let a = token.next().unwrap().parse::<i128>().unwrap();
        let b = token.next().unwrap().parse::<i128>().unwrap();
        writeln!(&mut writer, "{}", a + b).unwrap(); // バッファに出力
    }
}
```

どこが高速化できそう?

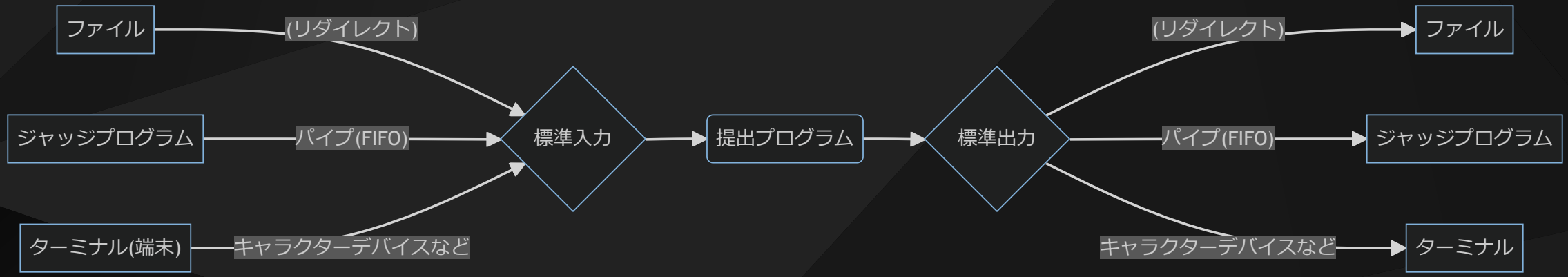
- 標準入力をバッファ付きで1行ずつ入力している所
  - 一度に入力全体を読み込んでから処理できないか？
- 行単位・トークン (空白文字区切り) 単位への分割をしている所
  - 入力バイト列が UTF-8 として有効かどうか検査をしている
  - 改行文字区切り・空白文字区切りで分割する処理が二重になっている
  - 競技プログラミングの入力形式は、通常は改行文字と空白文字をまとめて分割してしまっても問題なく入力できる（トークン数が可変であっても、問題文と最初の入力から入力すべきトークンの数が分かるようになっている）
- トークン文字列から数値にパース（文字データの解析・変換処理）している所
  - 文字列→128bit整数 の変換は最大で 1000000 回行う・入力は最大で約40MB
- 足し算した結果を文字列にフォーマットしている所
  - 128bit整数→文字列 の変換は最大で 500000 回行う・出力は最大で約20MB

A+Bから始める異常高速化

CASE 3: 一度に全部読み込み、改行と空白文字をまとめて分割 実行時間: 213ms
https://judge.yosupo.jp/submission/149269

```rust
use std::io::prelude::*;
fn main() {
    let (mut stdin, stdout) = (std::io::stdin(), std::io::stdout());
    let mut input = String::with_capacity(67_108_864); // 読み込みの格納先
    stdin.read_to_string(&mut input).unwrap(); // 一度に読み込み
    let mut token = s.split_ascii_whitespace(); // まとめて分割
    let mut writer = std::io::BufWriter::new(stdout.lock());
    let n = token.next().unwrap().parse::<usize>().unwrap();
    for _ in 0..n {
        let a = token.next().unwrap().parse::<i128>().unwrap();
        let b = token.next().unwrap().parse::<i128>().unwrap();
        writeln!(&mut writer, "{}", a + b).unwrap();
    }
}
```

標準入力・標準出力の流れ



- 通常ジャッジの場合: 入出力:ファイル
  - 入力が(書き込み中でない)ファイルだとプログラムの実行開始時点で最後まで読み込める
- 問題がインタラクティブ(対話的)の場合: 入出力:パイプ(FIFO)
- ターミナル(端末)上で実行する場合: 入出力:キャラクターデバイスなど
  - パイプ(FIFO)やキャラクタデバイスなどでの入力だと、プログラムの実行開始時点で最後まで読み込める保証が無い

標準入力がファイルかどうかの判定(Linux)

- Linux の fstat システムコール で stat 構造体を取得する
  - ファイル種別を示すビットマスク(ソケット/シンボリックリンク/通常のファイル/ブロックデバイス/ディレクトリ/キャラクターデバイス/FIFO(名前付きパイプ))、ファイル種別が通常のファイルであればファイルサイズ、所有権、最終修正時刻など
- Rust の場合、 std::fs::File::from_raw_fd で 標準入力 (File Decscriptor : 0) の Fileオブジェクトを作り、 std::fs::File::metadata を使うとこれらの情報を取得できる
  - 2023-06-01 リリースの Rust 1.70.0 では 入出力がターミナル(端末)かどうかを判定する std::io::IsTerminal トレイトが安定化

```
struct stat {
    dev_t     st_dev;     /* ファイルがあるデバイスの ID */
    ino_t     st_ino;     /* inode 番号 */
    mode_t    st_mode;    /* アクセス保護（ファイル種別の検査）*/
    nlink_t   st_nlink;   /* ハードリンクの数 */
    uid_t     st_uid;     /* 所有者のユーザー ID */
    gid_t     st_gid;     /* 所有者のグループ ID */
    dev_t     st_rdev;    /* デバイス ID（特殊ファイルの場合）*/
    off_t     st_size;    /* 全体のサイズ（バイト単位）*/
    blksize_t st_blksize; /* ファイルシステム I/O でのブロックサイズ */
    blkcnt_t  st_blocks;  /* 割り当てられた 512B のブロック数 */

    /* Linux 2.6 以降では、カーネルは以下のタイムスタンプ
       フィールドでナノ秒の精度をサポートしている。
       Linux 2.6 より前のバージョンでの詳細は NOTES を参照。 */

    struct timespec st_atim;  /* 最終アクセス時刻 */
    struct timespec st_mtim;  /* 最終修正時刻 */
    struct timespec st_ctim;  /* 最終状態変更時刻 */

#define st_atime st_atim.tv_sec  /* 後方互換性 */
#define st_mtime st_mtim.tv_sec
#define st_ctime st_ctim.tv_sec
};
```

read vs mmap

- read システムコール : ファイルディスクリプターからバッファーに読み込む
  - Rust の場合、標準ライブラリではこちらが使われる（Stdin の バッファーサイズは 8192bytes 固定、 40Mbytesの入力に readシステムコール が 約5000回必要）
- mmap, munmap システムコール : ファイルやデバイスをメモリーにマップ/アンマップする
  - 入力がファイルであることを前提に、今回はこちらを使って一括で読み込んでみます

```
#[must_use]
#[stable(feature = "rust1", since = "1.0.0")]
pub fn stdin() -> Stdin {
    static INSTANCE: OnceLock<Mutex<BufReader<StdinRaw>>> = OnceLock::new();
    Stdin {
        inner: INSTANCE.get_or_init(|| { // stdio::STDIN_BUF_SIZE は 8192bytes で固定
            Mutex::new(BufReader::with_capacity(stdio::STDIN_BUF_SIZE, stdin_raw()))
        }),
    }
}
```

A+Bから始める異常高速化

CASE 4: mmapを使用 : 実行時間 191ms : https://judge.yosupo.jp/submission/149279

```rust
#![cfg(target_os = "linux")]
use std::io::prelude::*;
fn solve(s: &str) {
    let stdout = std::io::stdout();
    let mut token = s.split_ascii_whitespace();
    let mut writer = std::io::BufWriter::new(stdout.lock());
    let n = token.next().unwrap().parse::<usize>().unwrap();
    for _ in 0..n {
        let a = token.next().unwrap().parse::<i128>().unwrap();
        let b = token.next().unwrap().parse::<i128>().unwrap();
        writeln!(&mut writer, "{}", a + b).unwrap();
    }
}
fn main() {
    unsafe {
        use std::os::unix::io::FromRawFd;
        // unsafe: 標準入力 (file discriptor 0) の metadata を取得 (内部で fstat システムコール)
        match std::fs::File::from_raw_fd(0).metadata() {
            Ok(metadata) if metadata.is_file() => { // 入力がファイルだった時の処理
                let filelen = metadata.len(); // ファイルサイズ
                // unsafe: mmap システムコール にてファイルをメモリマップドアクセス
                let input = mmap(std::ptr::null_mut(), filelen as usize, 1, 2, 0, 0);
                // unsafe: UTF-8 の有効性チェックを省略、 &[u8] を &str に強制キャスト
                solve(std::str::from_utf8_unchecked(std::slice::from_raw_parts(
                    input,
                    filelen as usize,
                )));
            }
            _ => panic!(), // panic: このサンプルでは、入力がファイルでなかった時の実装は省略
        }
    }
}
```

```rust
// unsafe: FFI
// (foreign function interface)
// Linux C Library (libc)
#[link(name = "c")]
extern "C" {
    pub fn mmap(
        addr: *mut u8,
        length: usize,
        prot: i32,
        flags: i32,
        fd: i32,
        off: isize,
    ) -> *mut u8;
}
```

入力がファイル以外だった時のアプローチ

Rust では `std::io::BufRead` トレイトに `fill_buf` (バッファが空なら充填して取得できた領域を返す、空でなければ使っていない領域を返す), `consume` (`fill_buf` で受け取った領域からどれだけ消費したかを `BufRead` に伝えて後の `fill_buf` で消費済みの領域が再び戻ってこないようにする) という比較的低レベルな機能があるので、これを使って実装する方法があります。

今回は時間の関係で、こちらのアプローチの詳細は省略します。

```rust
use std::io;
use std::io::prelude::*;

let stdin = io::stdin();
let mut stdin = stdin.lock();

let buffer = stdin.fill_buf().unwrap();

// work with buffer
// バッファを消費する
println!("{buffer:?}");

// ensure the bytes we worked with aren't returned again later
// 消費したバイト列の領域が、また後で fill_buf によって戻ってこないようにする
let length = buffer.len();
stdin.consume(length);
```

文字列 → 128bit整数への変換ですが...

これは10000個の非負整数が書かれた文字列を128bit整数へ変換するベンチマークですが...
何と、Rustでは 初期値0 から 文字列を左から順番に見ていって 10倍してから その桁の数字を足す という処理を繰り返した方が約2倍速かったりします。 (測定環境: AMD Zen+)

`str::parse::<u128>()`
722,148 ns/iter (+/- 6,374)

```
bench.iter(|| -> Vec<u128> {
    values
        .iter()
        .map(|s| s.parse::<u128>().unwrap())
        .collect::<Vec<_>>()
});
```

文字列先頭から1文字ずつ処理:
370,237 ns/iter (+/- 6,918)

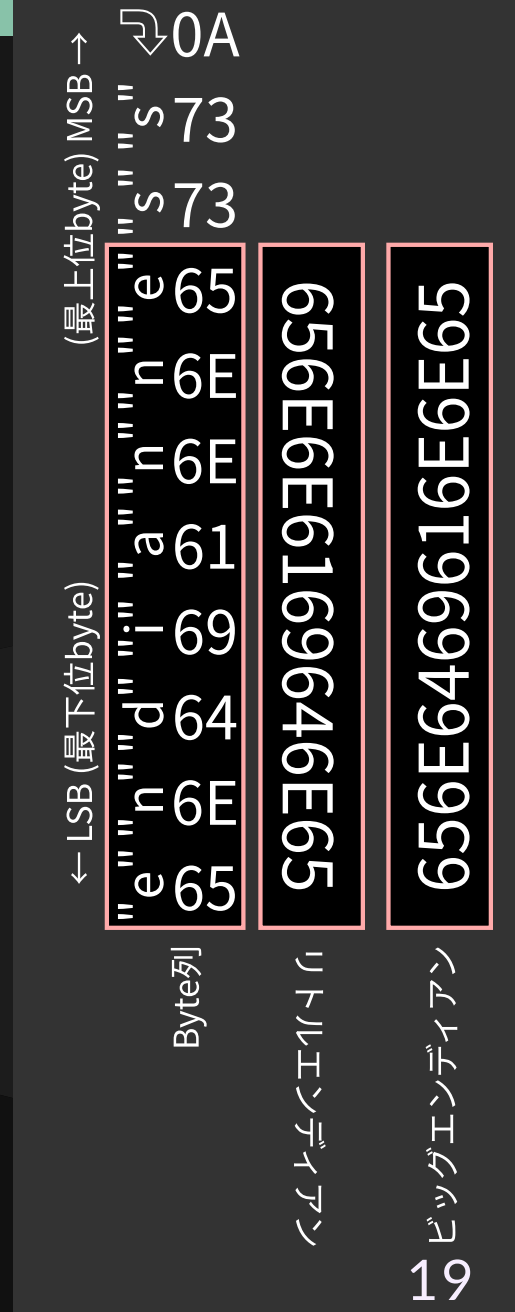
```
bench.iter(|| -> Vec<u128> {
    values
        .iter()
        .map(|s| {
            s.as_bytes()
                .iter()
                .fold(0u128, |p, &c| p * 10 + ((c - b'0') as u128))
        })
        .collect::<Vec<_>>()
});
```

何故 Rust の `parse` は遅い? (推測)

- その文字列が本当にその数値型に正常に収まる数値が書かれているか検査しながら変換しているので遅い。
  - 今回は、入力された文字列が制約通りであると仮定し、検査処理を省略して 文字列→整数 のパースを実装してみます
- 10進数の文字列を変換するのに特化せず、任意の基数の文字列を変換できるよう汎化しているため。
  - 10進数が書かれた文字列の処理に特化させて最適化を図ってみます

エンディアン (endianness) / バイト順 (byte order)

右図: ASCII文字列 "endianness⏎" の先頭8byteの領域を、それぞれのエンディアンで8byte整数として読み込んだ値の16進数表記



2bytes 幅以上の数値をコンピュータ上のメモリに格納する時や、データとして転送する時に、最下位のbyte (LSB: Least Significant Bit/Byte) から順番に格納や転送を行うことを リトルエンディアン (little-endian) と言います。逆に、最上位のbyte (MSB: Most Significant Bit/Byte) から順番に行うものは ビッグエンディアン (big-endian) と言います。

Intel/AMD x86_64 アーキテクチャでは、主にこのリトルエンディアンが使われています。

ビッグエンディアン は、例えば インターネット上での通信プロトコル、TCP/IP のヘッダ部分で数値をエンコーディングするのに使われます（ネットワークバイトオーダー）。 TCP/IP のペイロード部分のエンディアンはアプリケーションの実装次第で異なります。

8byte長の文字列を64bit整数に分割統治法で変換(1)

まずは、例として `"12345678"` の文字列を リトルエンディアン の 64bit整数型 に読み込んでみます。

← LSB (最下位byte)							(最上位byte) MSB →	
`"12345678"`								8byte文字列
`0x38` (56) `"8"`	`0x37` (55) `"7"`	`0x36` (54) `"6"`	`0x35` (53) `"5"`	`0x34` (52) `"4"`	`0x33` (51) `"3"`	`0x32` (50) `"2"`	`0x31` (49) `"1"`	`u64::from_le_bytes` 64bit整数(8bit区切り) (10進数表記)
← MSB (最上位byte)							(最下位byte) LSB →	

8byte長の文字列を64bit整数に分割統治法で変換(2)

次に、64bit整数 `0x0F0F0F0F0F0F0F0F` と AND演算 をして不要な所をマスクし、各桁毎の数を取り出します。

"12345678"								8byte文字列
0x38 (56) "8"	0x37 (55) "7"	0x36 (54) "6"	0x35 (53) "5"	0x34 (52) "4"	0x33 (51) "3"	0x32 (50) "2"	0x31 (49) "1"	`u64::from_le_bytes`
0x08 (8)	0x07 (7)	0x06 (6)	0x05 (5)	0x04 (4)	0x03 (3)	0x02 (2)	0x01 (1)	`AND 0x0F0F0F0F0F0F0F0F` 64bit整数(8bit区切り) (10進数表記)

8byte長の文字列を64bit整数に分割統治法で変換(3)

次に、整数 `0xA01` (10進数で `2561`) を掛け算します。
2桁ごとに区切った数が現れています。 $2^8 \times 10^1 + 1 = 2561$

`"12345678"`								8byte文字列
`0x38` (56) `"8"`	`0x37` (55) `"7"`	`0x36` (54) `"6"`	`0x35` (53) `"5"`	`0x34` (52) `"4"`	`0x33` (51) `"3"`	`0x32` (50) `"2"`	`0x31` (49) `"1"`	`u64::from_le_bytes`
`0x08` (8)	`0x07` (7)	`0x06` (6)	`0x05` (5)	`0x04` (4)	`0x03` (3)	`0x02` (2)	`0x01` (1)	`AND 0x0F0F0F0F0F0F0F0F`
`0x4E` (78)	`0x43` (67)	`0x38` (56)	`0x2D` (45)	`0x22` (34)	`0x17` (23)	`0x0C` (12)	`0x01` (1)	`× 0x000000000000A01` 64bit整数(8bit区切り) (10進数表記)

8byte長の文字列を64bit整数に分割統治法で変換(4)

次に、8bit の 右シフト演算 をして、2桁ごとにまとめた値の位置を調整します。

"12345678"								8byte文字列
0x38 (56)	0x37 (55)	0x36 (54)	0x35 (53)	0x34 (52)	0x33 (51)	0x32 (50)	0x31 (49)	`u64::from_le_bytes`
0x08 (8)	0x07 (7)	0x06 (6)	0x05 (5)	0x04 (4)	0x03 (3)	0x02 (2)	0x01 (1)	`AND 0x0F0F0F0F0F0F0F0F`
0x4E (78)	0x43 (67)	0x38 (56)	0x2D (45)	0x22 (34)	0x17 (23)	0x0C (12)	0x01 (1)	`× 0x000000000000A01`
0x00 (0)	0x4E (78)	0x43 (67)	0x38 (56)	0x2D (45)	0x22 (34)	0x17 (23)	0x0C (12)	`>> 8` 64bit整数(8bit区切り) (10進数表記)

8byte長の文字列を64bit整数に分割統治法で変換(5)

次に、 `0x00FF00FF00FF00FF` との AND演算 をして、 不要な桁にマスクを掛けます。

`"12345678"`								8byte文字列
`0x38`	`0x37`	`0x36`	`0x35`	`0x34`	`0x33`	`0x32`	`0x31`	`u64::from_le_bytes`
`0x08`	`0x07`	`0x06`	`0x05`	`0x04`	`0x03`	`0x02`	`0x01`	`AND 0x0F0F0F0F0F0F0F0F`
`0x4E` (78)	`0x43` (67)	`0x38` (56)	`0x2D` (45)	`0x22` (34)	`0x17` (23)	`0x0C` (12)	`0x01` (1)	`× 0x000000000000A01`
`0x00` (0)	`0x4E` (78)	`0x43` (67)	`0x38` (56)	`0x2D` (45)	`0x22` (34)	`0x17` (23)	`0x0C` (12)	`>> 8`
`0x00` (0)	`0x4E` (78)	`0x00` (0)	`0x38` (56)	`0x00` (0)	`0x22` (34)	`0x00` (0)	`0x0C` (12)	`AND 0x00FF00FF00FF00FF` 64bit整数(8bit区切り) (10進数表記)

A+Bから始める異常高速化

MSB							LSB	処理
0x38 (56) "8"	0x37 (55) "7"	0x36 (54) "6"	0x35 (53) "5"	0x34 (52) "4"	0x33 (51) "3"	0x32 (50) "2"	0x31 (49) "1"	u64::from_le_bytes
0x08 (8)	0x07 (7)	0x06 (6)	0x05 (5)	0x04 (4)	0x03 (3)	0x02 (2)	0x01 (1)	AND 0x0F0F0F0F0F0F0F0F
0x4E (78)	0x43 (67)	0x38 (56)	0x2D (45)	0x22 (34)	0x17 (23)	0x0C (12)	0x01 (1)	× 0x0000000000000A01
0x00 (0)	0x4E (78)	0x43 (67)	0x38 (56)	0x2D (45)	0x22 (34)	0x17 (23)	0x0C (12)	>> 8
0x00 (0)	0x4E (78)	0x00 (0)	0x38 (56)	0x00 (0)	0x22 (34)	0x00 (0)	0x0C (12)	AND 0x00FF00FF00FF00FF

8byte長の文字列を64bit整数に分割統治法で変換(6)

次は、16bit区切りの値に注目して処理していきます。

"12345678"				8byte文字列
0x004E (78)	0x0038 (56)	0x0022 (34)	0x000C (12)	u64::from_le_bytes AND 0x0F0F0F0F0F0F0F0F × 0x000000000000A01 >> 8 AND 0x00FF00FF00FF00FF 16bit区切り (10進数表記)

8byte長の文字列を64bit整数に分割統治法で変換(7)

整数 `0x640001` (10進数で `6553601`) を掛け算、16ビット右シフト、 `0x0000FFFF0000FFFF` との AND演算をします。 $2^{16} \times 10^2 + 1 = 6553601$

"12345678"				8byte文字列
0x004E (78)	0x0038 (56)	0x0022 (34)	0x000C (12)	u64::from_le_bytes AND 0x0F0F0F0F0F0F0F0F × 0x0000000000000A01 >> 8 AND 0x00FF00FF00FF00FF
0x162E (5678)	0x0D80 (3456)	0x04D2 (1234)	0x000C (12)	× 0x0000000000640001
0x0000 (0)	0x162E (5678)	0x0D80 (3456)	0x04D2 (1234)	>> 16
0x0000 (0)	0x162E (5678)	0x0000 (0)	0x04D2 (1234)	AND 0x0000FFFF0000FFFF

A+Bから始める異常高速化

MSB			LSB	処理
0x3837 **"78"**	0x3635 **"56"**	0x3433 **"34"**	0x3231 **"12"**	u64::from_le_bytes
0x0807	0x0605	0x0403	0x0201	AND 0x0F0F0F0F0F0F0F0F
0x4E43	0x382D	0x2217	0x0C01	× 0x000000000000A01
0x004E	0x4338	0x2D22	0x170C	>> 8
0x004E **(78)**	0x0038 **(56)**	0x0022 **(34)**	0x000C **(12)**	AND 0x00FF00FF00FF00FF
0x162E **(5678)**	0x0D80 (3456)	0x04D2 **(1234)**	0x000C (12)	× 0x0000000000640001
0x0000 (0)	0x162E **(5678)**	0x0D80 (3456)	0x04D2 **(1234)**	>> 16
0x0000 (0)	0x162E **(5678)**	0x0000 (0)	0x04D2 **(1234)**	AND 0x0000FFFF0000FFFF

8byte長の文字列を64bit整数に分割統治法で変換(8)

最後に 32bit 区切りで見ていきます。整数 `0x271000000001` (10進数で `42949672960001`) を掛け算、32ビット右シフト をします。これで完成です。 $2^{32} \times 10^4 + 1 = 42949672960001$

"12345678"		8byte文字列
0x0000162E (5678)	0x000004D2 (1234)	u64::from_le_bytes AND 0x0F0F0F0F0F0F0F0F × 0x0000000000000A01 >> 8 AND 0x00FF00FF00FF00FF × 0x0000000000640001 >> 16 AND 0x0000FFFF0000FFFF
0x00BC614E (12345678)	0x000004D2 (1234)	× 0x000271000000001
0x00000000 (0)	0x00BC614E (12345678)	>> 32

A+Bから始める異常高速化

MSB	LSB	処理
0x38373635 **"5678"**	0x34333231 **"1234"**	u64::from_le_bytes
0x08070605	0x04030201	AND 0x0F0F0F0F0F0F0F0F
0x4E43382D	0x22170C01	× 0x0000000000000A01
0x004E4338	0x2D22170C	>> 8
0x004E0038	0x0022000C	AND 0x00FF00FF00FF00FF
0x162E0D80	0x04D2000C	× 0x0000000000640001
0x0000162E	0x0D8004D2	>> 16
0x0000162E **(5678)**	0x000004D2 **(1234)**	AND 0x0000FFFF0000FFFF
0x00BC614E **(12345678)**	0x000004D2 (1234)	× 0x0000271000000001
0x00000000 (0)	0x00BC614E **(12345678)**	>> 32

8byte長の文字列を64bit整数に分割統治法で変換(9)

Rust でのコードにすると、このような感じになります。

```
fn parseuint_raw8b(s: [u8; 8]) -> u64 {
    (((((u64::from_le_bytes(s) & 0x0f0f0f0f0f0f0f0f)
        .wrapping_mul((10 << 8) + 1) >> 8) & 0x00ff00ff00ff00ff)
        .wrapping_mul((100 << 16) + 1) >> 16) & 0x0000ffff0000ffff)
        .wrapping_mul((10000 << 32) + 1) >> 32
}
```

符号なし整数10000個のparse	32bit整数(~10桁)	64bit整数(~20桁)	128bit整数(~39桁)

`str::parse::<u128>().unwrap()`
`str::parse::<u64>().unwrap()`
`str::parse::<u32>().unwrap()`
	117,630 ns/iter (+/- 1,631)	238,559 ns/iter (+/- 2,310)	720,681 ns/iter (+/- 16,091)

文字列先頭から1文字ずつ	65,094 ns/iter (+/- 717)	131,462 ns/iter (+/- 1,320)	364,676 ns/iter (+/- 4,186)
分割統治法で8文字ずつ	32,570 ns/iter (+/- 420)	56,551 ns/iter (+/- 637)	94,753 ns/iter (+/- 568)

8byte長の文字列を64bit整数に分割統治法で変換(10)

x86_64 アセンブラに変換した後の結果はこのような感じになります。

レジスタ代入が4回、掛け算が3回、AND演算が3回、右シフト演算が3回で処理できている事が見て取れます。

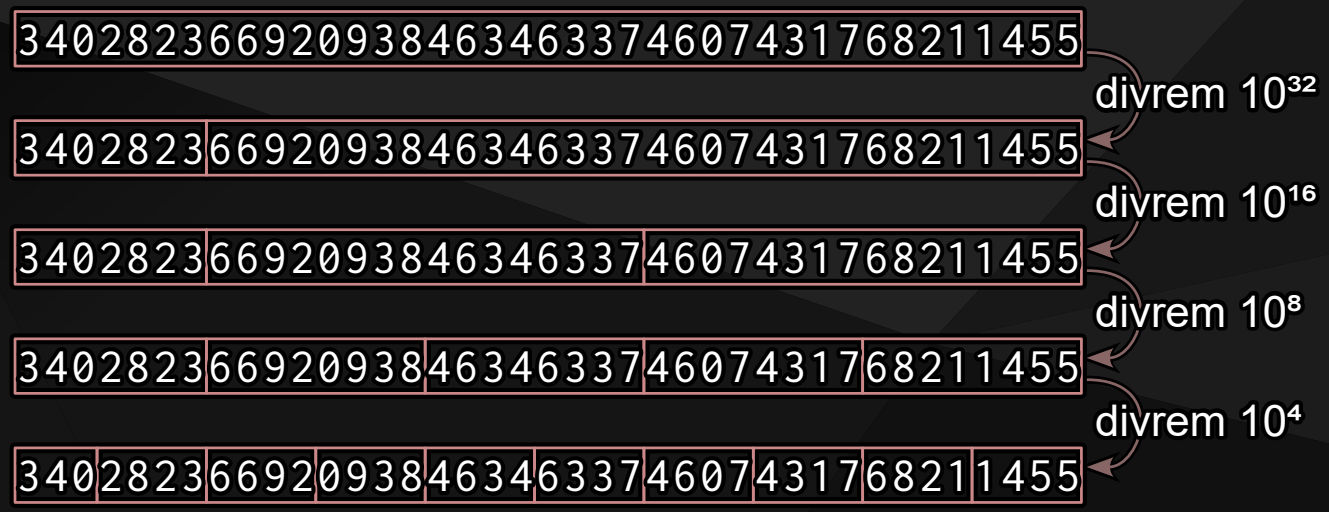
これと同様の手法は、SIMDレジスタを用いてもっと長い区切りで並列的に処理することもできます。

```
fn parseuint_raw8b(s: [u8; 8]) -> u64 {
    (((((u64::from_le_bytes(s) & 0x0f0f0f0f0f0f0f0f)
        .wrapping_mul((10 << 8) + 1) >> 8) & 0x00ff00ff00ff00ff)
        .wrapping_mul((100 << 16) + 1) >> 16) & 0x0000ffff0000ffff)
        .wrapping_mul((10000 << 32) + 1) >> 32
}
```

```
parseuint_raw8b:
        movabs  rax, 1085102592571150095 # 0x0F0F0F0F0F0F0F0F
        and     rax, rdi                 # AND演算
        imul    rax, rax, 2561           # × 0xA01
        shr     rax, 8                   # 右8ビットシフト
        movabs  rcx, 71777214294589695   # 0x00FF00FF00FF00FF
        and     rcx, rax                 # AND演算
        imul    rax, rcx, 6553601        # × 0x640001
        shr     rax, 16                  # 右16ビットシフト
        movabs  rcx, 281470681808895     # 0x0000FFFF0000FFFF
        and     rcx, rax                 # AND演算
        movabs  rax, 42949672960001      # 0x0000271000000001
        imul    rax, rcx                 # 掛け算
        shr     rax, 32                  # 右32ビットシフト
        ret                              # return
```

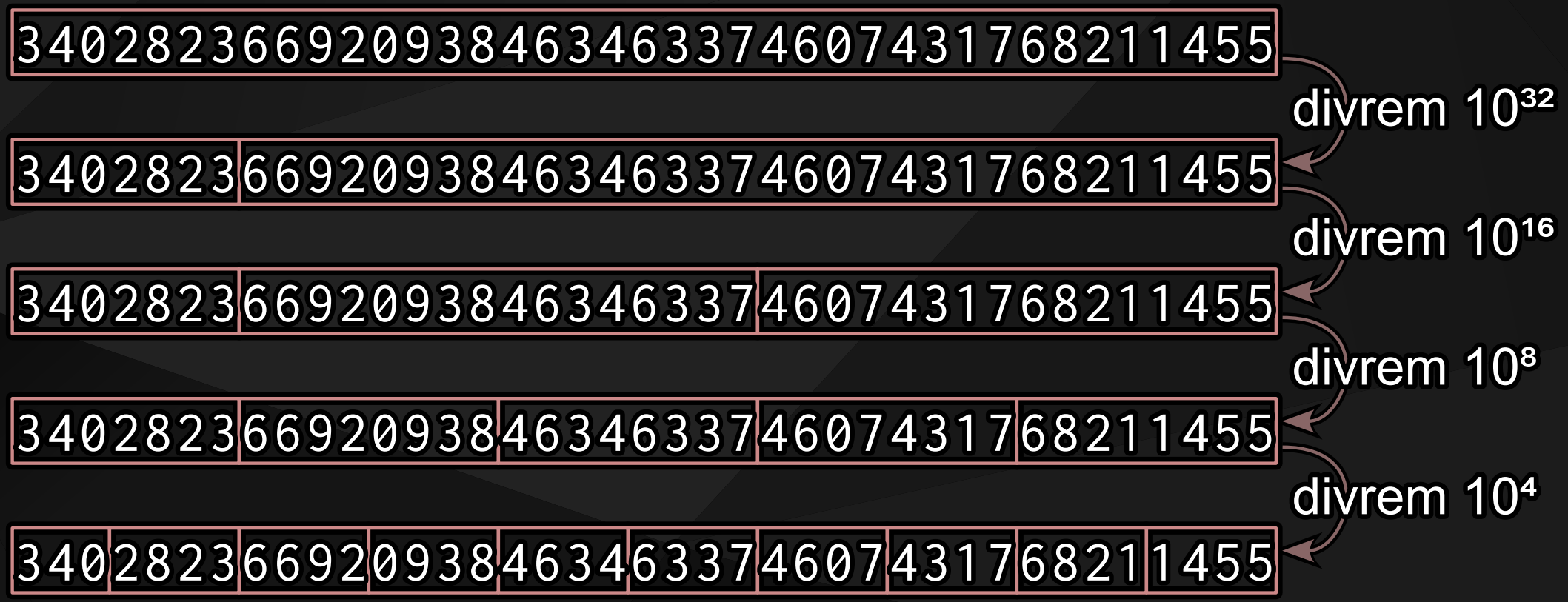
128bit整数から文字列への変換(1)

$2^{128} \simeq 3.4028 \times 10^{38}$ より、128bit整数は最大 39 桁の整数になります。`0000` ～ `9999` までの 4 桁の 10000 個の文字列を事前生成し、入力された数を 10000 進数に変換、 4 桁ごとに出力します。 (divrem: 除算によってその商と剰余の両方を求める演算)



10^{32} と 10^{16} での除算・剰余算は、現状のRustでは最適化が甘い（ソフトウェア実装の128bit除算ライブラリ `__udivti3` が使われる: 比較的遅い）ので、手動で最適化します。

A+Bから始める異常高速化



128bit整数から文字列への変換(2)

128bit(最大 39 桁)の整数を 10^{32} で除算し、 上位 7 桁 と 下位 32 桁に分割する。

$$x \in \mathbb{Z},\ 0 \leq x < 2^{128} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{x}{10^{32}} - 1\right) < \left(\left\lfloor \frac{x}{2^{64}} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{2^{128}}{10^{32}} \right\rfloor \times \frac{1}{2^{64}}\right) \leq \frac{x}{10^{32}}$$

```rust
fn divrem_1e32(x: u128) -> (u32, u128) {
    // (y0, y1) = (floor(x / 10^32), x mod 10^32)
    // floor((2^128)/(10^32)) = 3402823
    let mut y0 = ((((x >> 64) as u64 as u128) * 3402823) >> 64) as u32;
    let mut y1 = x - (y0 as u128) * 1_0000_0000_0000_0000_0000_0000_0000_0000;
    if let Some(yt) = y1.checked_sub(1_0000_0000_0000_0000_0000_0000_0000_0000) {
        y1 = yt;
        y0 += 1;
    }
    (y0, y1)
}
```

128bit整数から文字列への変換(3)

32 桁の整数 を 10^{16} で除算し、 上位 16 桁 と 下位 16 桁に分割する。

$$x \in \mathbb{Z},\ 0 \leq x < 10^{32} < 2^{107} \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{x}{10^{16}} - 1\right) < \left(\left\lfloor \frac{x}{2^{43}} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{2^{107}}{10^{16}} \right\rfloor \times \frac{1}{2^{64}}\right) \leq \frac{x}{10^{16}}$$

```rust
fn divrem_1e16(x: u128) -> (u64, u64) {
    debug_assert!(x < 1_0000_0000_0000_0000_0000_0000_0000_0000);
    // (z0, z1) = (floor(x / 10^16), x mod 10^16)
    // floor((2^107)/(10^16)) = 1622592768292133 6
    let mut z0 = ((((x >> 43) as u64 as u128) * 1622592768292133 6) >> 64) as u64;
    let mut z1 = (x - (z0 as u128) * 1_0000_0000_0000_0000) as u64;
    if let Some(zt) = z1.checked_sub(1_0000_0000_0000_0000) {
        z1 = zt;
        z0 += 1;
    }
    (z0, z1)
}
```

128bit整数から文字列への変換(4)

通常の除算を使用した場合のアセンブラ出力例:

汎用的な128bit除算のソフトウェア実装 `__udivti3` を呼び出していたり、レジスタの使用量が多く、 `push` / `pop` が発生していたりするのが見て取れます。

```
const D32U: u128 = 100000000000000000000000000000000;
pub fn divrem_1e32_std(x: u128) -> (u32, u128) {
    let y0 = (x / D32U) as u32;
    let y1 = x % D32U;
    (y0, y1)
}
```

```
divrem_1e32_std:
    push    r15
    push    r14
    push    r12
    push    rbx
    push    rax
    mov     rbx, rsi
    mov     r14, rdi
    movabs  r15, -8814407033341083648
    movabs  r12, 5421010862427
    mov     rdx, r15
    mov     rcx, r12
    call    qword ptr [rip + __udivti3@GOTPCREL]
    mov     rcx, rax
    mov     rsi, rdx
    imul    r12, rax
    mov     rax, rcx
    mul     r15
    add     rdx, r12
    imul    rsi, r15
    add     rsi, rdx
    sub     r14, rax
    sbb     rbx, rsi
    mov     eax, ecx
    mov     rdx, r14
    mov     rcx, rbx
    add     rsp, 8
    pop     rbx
    pop     r12
    pop     r14
    pop     r15
    ret
```

128bit整数から文字列への変換(5)

10^{32} での除算専用化した場合のアセンブラ出力例:

`__udivti3` の呼び出しが排除され、レジスタの使用量が減っているのが見て取れます。

```
const D32U: u128 = 100000000000000000000000000000000;
pub fn divrem_1e32(x: u128) -> (u32, u128) {
    // (y0, y1) = (floor(x / 10^32), x mod 10^32)
    // floor((2^128)/(10^32)) = 3402823
    let mut y0 = ((((x >> 64) as u64 as u128) * 3402823) >> 64) as u32;
    let mut y1 = x - (y0 as u128) * D32U;
    if let Some(yt) = y1.checked_sub(D32U) {
        y1 = yt;
        y0 += 1;
    }
    (y0, y1)
}
```

```
divrem_1e32:
    mov     r8, rsi
    mov     ecx, 3402823
    mov     rax, rsi
    mul     rcx
    mov     rsi, rdx
    movabs  rcx, -5421010862428
    mov     r10, rdx
    imul    r10, rcx
    movabs  r9, 8814407033341083648
    mov     rax, rdx
    mul     r9
    add     r10, rdx
    add     rax, rdi
    adc     r10, r8
    add     r9, rax
    adc     rcx, r10
    movabs  rdx, -8814407033341083649
    cmp     rdx, rax
    movabs  rdx, 5421010862427
    sbb     rdx, r10
    cmovae  rcx, r10
    cmovae  r9, rax
    adc     esi, 0
    mov     eax, esi
    mov     rdx, r9
    ret
```

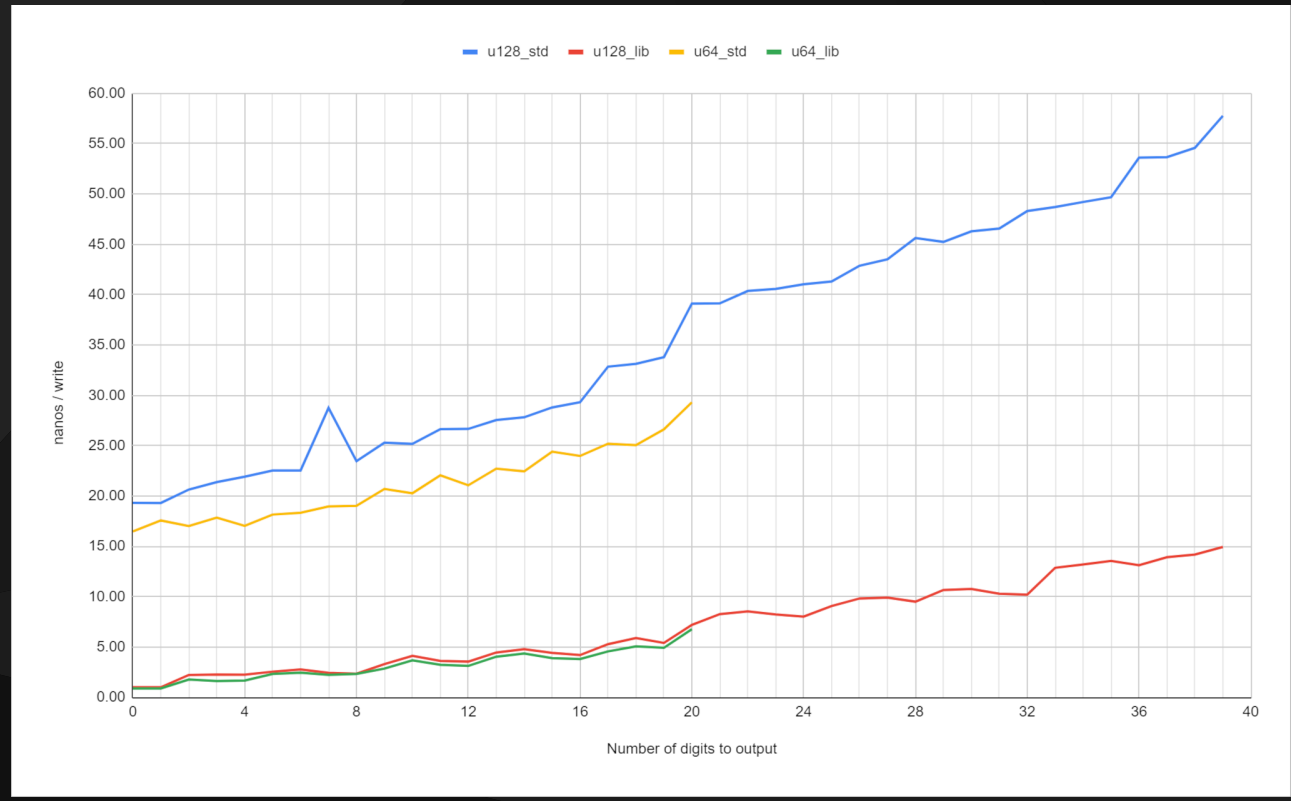
128bit整数から文字列への変換(6)

ベンチマーク結果:

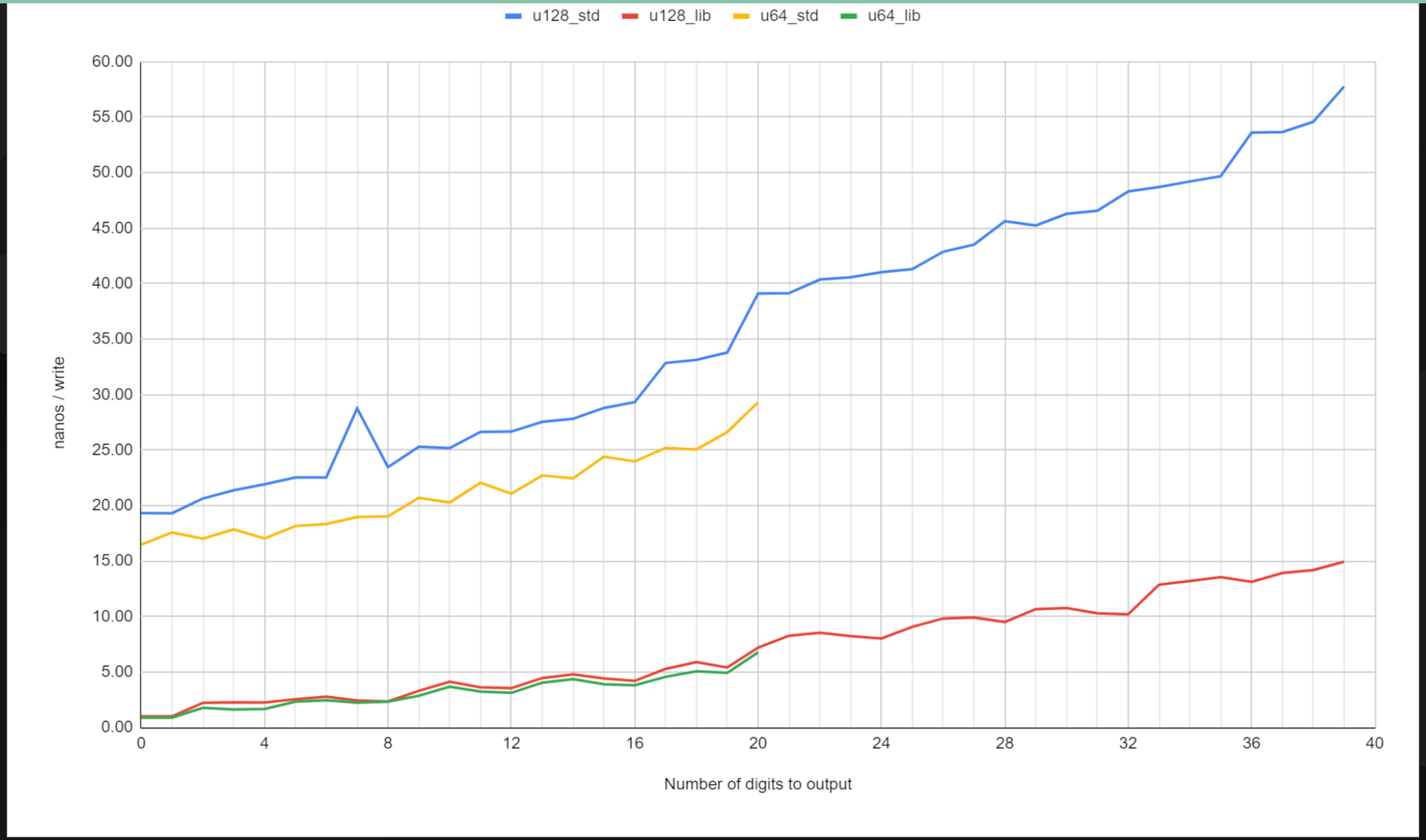
- 縦軸: 1出力あたりの所要時間(単位:ナノ秒)
- 横軸: 出力する数の10進数での桁数
- 青線: Rustの標準フォーマッタによる出力(128bit整数)
- 黄線: Rustの標準フォーマッタによる出力(64bit整数)

```
for &e in values.iter() {
    use std::fmt::Write;
    write!(&mut s, "{}", e).unwrap();
    s.push(' ');
}
```

- 赤線: 今回の実装(128bit整数)
- 緑線: 今回の実装(64bit整数)



A+Bから始める異常高速化



A+Bから始める異常高速化

```rust
let c_std = || -> String {
    let mut s = String::with_capacity(N * 40);
    for &e in values.iter() {
        use std::fmt::Write;
        write!(&mut s, "{}", e).unwrap(); // 標準のフォーマッタによる出力
        s.push(' '); // 空白文字区切り、write!内のフォーマット文字列に空白文字加えるより、こちらのが速い
    }
    s
};
let c_lib = || -> String {
    let mut s = String::with_capacity(N * 40);
    let v = unsafe { s.as_mut_vec() };
    let r = v.as_mut_ptr();
    let mut p = r;
    for &e in values.iter() {
        unsafe {
            dec4le.rawbytes_u128(&mut p, e); // 今回作成した出力ルーチンを呼び出し
            *p = b' '; // 空白文字区切り
            p = p.add(1);
        }
    }
    unsafe { v.set_len((p as usize) - (r as usize)) };
    s
};
```

std版参考: Qiita: Rustで数値を連結した文字列を作るときはItertools::joinが速い

補足: 除算の最適化の例 (1/6)

$\lceil x \rceil$ は天井関数(ceiling): 小数点以下($+\infty$ 向き)切り上げ、 $\lfloor x \rfloor$ は床関数(floor): 小数点以下($-\infty$ 向き)切り下げ

$$x, y \in \mathbb{Z}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 1 \quad \longrightarrow \quad \left\lceil \frac{x}{y} \right\rceil = \left\lfloor \frac{x+y-1}{y} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x-1}{y} \right\rfloor + 1 \qquad \text{(天井関数と床関数の関係)}$$

除数・被除数がある程度小さい場合 : d : 除数, x : 被除数, t : パラメータ, r : d, t から決まる値

$$d, r, t, x \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq d, \quad 0 \leq t, \quad r = \left(\left\lceil \frac{2^t}{d} \right\rceil \times d - 2^t \right) = \left(\left\lfloor \frac{2^t + d - 1}{d} \right\rfloor \times d - 2^t \right), \quad 0 \leq rx < 2^t$$

$$\longrightarrow \quad \left\lfloor \left\lceil \frac{2^t}{d} \right\rceil \times \frac{x}{2^t} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2^t + r}{d} \times \frac{x}{2^t} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{d} + \frac{rx}{2^t d} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \qquad \left(\left\lceil \frac{2^t}{d} \right\rceil = \frac{2^t + r}{d}, \quad 0 \leq \frac{rx}{2^t d} < \frac{1}{d} \right)$$

例:

$$x \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq x < 1.19 \times 2^{70} < \frac{2^{90}}{875776} \quad \longrightarrow \quad \left\lfloor \left\lceil \frac{2^{90}}{10^8} \right\rceil \times \frac{x}{2^{90}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2^{90} + 875776}{10^8} \times \frac{x}{2^{90}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{10^8} + \frac{875776x}{2^{90} \times 10^8} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{10^8} \right\rfloor$$

$$x \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq x < 1.75 \times 2^{34} < \frac{2^{45}}{1168} \quad \longrightarrow \quad \left\lfloor \left\lceil \frac{2^{45}}{10^4} \right\rceil \times \frac{x}{2^{45}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2^{45} + 1168}{10^4} \times \frac{x}{2^{45}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{10^4} + \frac{1168x}{2^{45} \times 10^4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{10^4} \right\rfloor$$

$$x \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq x \leq 43690 < \frac{2^{19}}{12} \quad \longrightarrow \quad \left\lfloor \left\lceil \frac{2^{19}}{10^2} \right\rceil \times \frac{x}{2^{19}} \right\rfloor \left\lfloor \frac{2^{19} + 12}{10^2} \times \frac{x}{2^{19}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{10^2} + \frac{12x}{2^{19} \times 10^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{10^2} \right\rfloor$$

$$x \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq x < 1024 = \frac{2^{11}}{2} \quad \longrightarrow \quad \left\lfloor \left\lceil \frac{2^{11}}{10} \right\rceil \times \frac{x}{2^{11}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2^{11} + 2}{10} \times \frac{x}{2^{11}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{10} + \frac{2x}{2^{11} \times 10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor$$

補足: 除算の最適化の例 (2/6)

例: 64bit環境で $0 \leq x < 2^{64}$ として $\lfloor x/3 \rfloor$ と $\left\lfloor x/10^8 \right\rfloor$ の除算を最適化:

$$x \in \mathbb{Z},\quad 0 \leq x < 2^{65} \quad \longrightarrow \quad \left\lfloor \left\lceil \frac{2^{65}}{3} \right\rceil \times \frac{x}{2^{65}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2^{65}+1}{3} \times \frac{x}{2^{65}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{3} + \frac{x}{2^{65} \times 3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$$

$$x \in \mathbb{Z},\quad 0 \leq 875776x < 2^{90} \quad \longrightarrow \quad \left\lfloor \left\lceil \frac{2^{90}}{10^8} \right\rceil \times \frac{x}{2^{90}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2^{90}+875776}{10^8} \times \frac{x}{2^{90}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{10^8} + \frac{875776x}{2^{90} \times 10^8} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{10^8} \right\rfloor$$

```rust
pub fn udiv3(x: u64) -> u64 {
    x / 3
}
pub fn udiv3_shim(x: u64) -> u64 { // 上の関数と同じ最適化がされる関数
    ((x as u128) * (((1u128 << 65) - 1) / 3 + 1) >> 65) as u64
}

pub fn udiv1e8(x: u64) -> u64 {
    x / 100000000
}
pub fn udiv1e8_shim(a: u64) -> u64 { // 上の関数と同じ最適化がされる関数
    ((x as u128) * (((1u128 << 90) - 1) / 100000000 + 1) >> 90) as u64
}
```

補足: 除算の最適化の例 (3/6)

例: 64bit環境で $0 \leq x < 2^{64}$ として $\lfloor x/7 \rfloor$ の除算を最適化:

$$x \in \mathbb{Z},\quad 0 \leq 5x < 2^{67} \quad \longrightarrow \quad \left\lfloor \frac{2^{67}+5}{7} \times \frac{x}{2^{67}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{7} + \frac{5x}{2^{67} \times 7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{7} \right\rfloor \qquad \left(\text{ただし } 2^{64} < \frac{2^{67}+5}{7} \text{ に注意}\right)$$

$$2^{64} < \frac{2^{67}+5}{7} < 2^{65},\quad \left\lfloor \left(\frac{2^{67}+5}{7} - 2^{64} \right) \times \frac{x}{2^{64}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2^{64}+5}{7} \times \frac{x}{2^{64}} \right\rfloor \leq x \text{ より、64bit演算に収めるため変形して}$$

$$\left\lfloor \frac{2^{67}+5}{7} \times \frac{x}{2^{67}} \right\rfloor = \left\lfloor \left(\left(\frac{2^{67}+5}{7} - 2^{64} \right) \times \frac{x}{2^{64}} + x \right) \times \frac{1}{2^3} \right\rfloor = \left\lfloor \left(\left\lfloor \frac{2^{64}+5}{7} \times \frac{x}{2^{64}} \right\rfloor + x \right) \times \frac{1}{2^3} \right\rfloor$$

$$= \left\lfloor \left(\left\lfloor \left(x - \left\lfloor \frac{2^{64}+5}{7} \times \frac{x}{2^{64}} \right\rfloor \right) \times \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^{64}+5}{7} \times \frac{x}{2^{64}} \right\rfloor \right) \times \frac{1}{2^2} \right\rfloor \qquad \left(\frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} + a \text{ より} \right)$$

最後の変形は、$\left(\left\lfloor \frac{2^{64}+5}{7} \times \frac{x}{2^{64}} \right\rfloor + x \right) \times \frac{1}{2}$ の部分の64bit加算オーバーフローを回避する処置をしています。

```rust
pub fn udiv7(x: u64) -> u64 {
    x / 7
}
pub fn udiv7_shim(x: u64) -> u64 { // 上の関数と同じ最適化がされる関数
    let t = ((x as u128) * (((1u128 << 67) - 1) / 7 + 1 - (1u128 << 64)) >> 64) as u64;
    (((x - t) >> 1) + t) >> 2
}
```

補足: 除算の最適化の例 (4/6)

例: $0 \le x < 10^{24} < 2^{80}$ として $\lfloor x/10^{16} \rfloor$ を手動最適化する例:

$$2^{61} < \left\lceil \frac{2^{115}}{10^{16}} \right\rceil = \left\lceil \frac{2^{99}}{5^{16}} \right\rceil = \frac{2^{99} + 26794881687}{5^{16}} = 4153837486827862103 < 2^{62}, \quad 1.28 \times 2^{64} < \frac{2^{99}}{26794881687},$$

$$x \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le 26794881687 \left\lfloor x/2^{16} \right\rfloor < 2^{99} \quad \longrightarrow \quad 0 \le \left\lfloor x/2^{16} \right\rfloor < \frac{2^{99}}{26794881687} \quad \longrightarrow \quad 0 \le \frac{26794881687 \left\lfloor x/2^{16} \right\rfloor}{2^{99}} < 1$$

$$\longrightarrow \quad \left\lfloor \left\lceil \frac{2^{99}}{5^{16}} \right\rceil \times \frac{\left\lfloor x/2^{16} \right\rfloor}{2^{99}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2^{99} + 26794881687}{5^{16}} \times \frac{\left\lfloor x/2^{16} \right\rfloor}{2^{99}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor x/2^{16} \right\rfloor}{5^{16}} + \frac{26794881687 \left\lfloor x/2^{16} \right\rfloor}{2^{99} \times 5^{16}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor x/2^{16} \right\rfloor}{5^{16}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{10^{16}} \right\rfloor$$

```rust
// 10^24 未満の整数 x の入力に対して floor(x / 10^16), (x mod 10^16) を計算
// ceil(2^115 / 10^16) = ceil(2^99 / 5^16) = 4153837486827862103
// 0 <= x < 10^24 < 2^80
//   --> floor(floor(x / 2^16) * ceil(2^115 / 10^16) / 2^99) = floor(x / 10^16)
pub fn udivrem1e16_less1e24(x: u128) -> (u64, u64) {
    debug_assert!(x < 1000000000000000000000000);
    let y1 = (((x >> 16) as u64 as u128) * 4153837486827862103 >> 99) as u64;
    let y0 = (x - (y1 as u128) * 10000000000000000) as u64;
    (y1, y0)
}
```

A+Bから始める異常高速化

```rust
pub fn udiv3(x: u64) -> u64 {
    x / 3
}
pub fn udiv3_shim(x: u64) -> u64 { // 上の関数と同じ最適化がされる関数
    ((x as u128) * (((1u128 << 65) - 1) / 3 + 1) >> 65) as u64
}
```

```
# x86_64-unknown-linux-gnu
udiv3:
    mov     rax, rdi
    movabs  rcx, -6148914691236517205
    mul     rcx
    mov     rax, rdx
    shr     rax
    ret
```

```
# aarch64-unknown-linux-gnu
udiv3:
    mov     x8, #-6148914691236517206
    movk    x8, #43691
    umulh   x8, x0, x8
    lsr     x0, x8, #1
    ret
```

A+Bから始める異常高速化

```rust
pub fn udiv1e8(x: u64) -> u64 {
    x / 100000000
}
pub fn udiv1e8_shim(a: u64) -> u64 { // 上の関数と同じ最適化がされる関数
    ((x as u128) * (((1u128 << 90) - 1) / 100000000 + 1) >> 90) as u64
}
```

```
# x86_64-unknown-linux-gnu
udiv1e8:
    mov     rax, rdi
    movabs  rcx, -6067343680855748867
    mul     rcx
    mov     rax, rdx
    shr     rax, 26
    ret
```

```
# aarch64-unknown-linux-gnu
udiv1e8:
    mov     x8, #52989
    movk    x8, #33889, lsl #16
    movk    x8, #30481, lsl #32
    movk    x8, #43980, lsl #48
    umulh   x8, x0, x8
    lsr     x0, x8, #26
    ret
```

A+Bから始める異常高速化

```rust
pub fn udiv7(x: u64) -> u64 {
    x / 7
}
pub fn udiv7_shim(x: u64) -> u64 { // 上の関数と同じ最適化がされる関数
    let t = ((x as u128) * (((1u128 << 67) - 1) / 7 + 1 - (1u128 << 64)) >> 64) as u64;
    (((x - t) >> 1) + t) >> 2
}
```

```
# x86_64-unknown-linux-gnu
udiv7:
    movabs  rcx, 2635249153387078803
    mov     rax, rdi
    mul     rcx
    sub     rdi, rdx
    shr     rdi
    lea     rax, [rdi + rdx]
    shr     rax, 2
    ret
```

```
# aarch64-unknown-linux-gnu
udiv7:
    mov     x8, #9363
    movk    x8, #37449, lsl #16
    movk    x8, #18724, lsl #32
    movk    x8, #9362, lsl #48
    umulh   x8, x0, x8
    sub     x9, x0, x8
    add     x8, x8, x9, lsr #1
    lsr     x0, x8, #2
    ret
```

A+Bから始める異常高速化

```rust
// 10^24 未満の整数 x の入力に対して floor(x / 10^16), (x mod 10^16) を計算
pub fn udivrem1e16_less1e24(x: u128) -> (u64, u64) {
    // must be x < 10^24
    debug_assert!(x < 1000000000000000000000000);
    // (z0, z1) = (floor(x / 10^16), x mod 10^16)
    // ceil(2^115 / 10^16) = ceil(2^99 / 5^16) = 4153837486827862103
    let z0 = (((x >> 16) as u64 as u128) * 4153837486827862103 >> 99) as u64;
    let z1 = (x - (z0 as u128) * 10000000000000000) as u64;
    (z0, z1)
}
```

```
# x86_64-unknown-linux-gnu
udivrem1e16_less1e24:
    mov     rax, rsi
    shld    rax, rdi, 48
    movabs  rcx, 4153837486827862103
    mul     rcx
    mov     rax, rdx
    shr     rax, 35
    movabs  rdx, -10000000000000000
    imul    rdx, rax
    add     rdx, rdi
    ret
```

```
# aarch64-unknown-linux-gnu
udivrem1e16_less1e24:
    mov     x9, #30807
    extr    x8, x1, x0, #16
    movk    x9, #45331, lsl #16
    movk    x9, #25903, lsl #32
    movk    x9, #14757, lsl #48
    umulh   x8, x8, x9
    mov     x9, #2420047872
    movk    x9, #30989, lsl #32
    lsr     x8, x8, #35
    movk    x9, #65500, lsl #48
    madd    x1, x8, x9, x0
    mov     x0, x8
    ret
```

補足: 除算の最適化の例 (5/6)

乗算の桁数が大きすぎる場合 (今回 10^{32} や 10^{16} での除算最適化で用いた方法) :

(d が2の累乗数でない場合) : d : 除数, x : 被除数, s, t : パラメータ

$$d, s, t, x \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq s, \quad 0 \leq t, \quad 2^s \leq d \leq 2^{(s+t)}, \quad 2^{(s+t)} \not\equiv 0 \pmod{d},$$

$$0 \leq x < \frac{2^{(s+t)}(d - 2^s)}{2^{(s+t)} \bmod d} + 2^s$$

$$\longrightarrow \quad \left(\frac{x}{d} - 1\right) < \left(\left\lfloor \frac{x}{2^s} \right\rfloor \left\lfloor \frac{2^{(s+t)}}{d} \right\rfloor \frac{1}{2^t}\right) \leq \frac{x}{d} \qquad \text{(導出の詳細は次頁参照)}$$

$$\longrightarrow \quad \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor - 1 \leq \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{2^s} \right\rfloor \left\lfloor \frac{2^{(s+t)}}{d} \right\rfloor \frac{1}{2^t} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \qquad \text{(床関数 (floor) を適用)}$$

(d が2の累乗数の場合) : d : 除数, x : 被除数, s, t : パラメータ (2の累乗数でない時と同じ処理が可能)

$$d, s, t, x \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq s, \quad 0 \leq t, \quad 2^s \leq d \leq 2^{(s+t)}, \quad 2^{(s+t)} \equiv 0 \pmod{d}, \quad 0 \leq x$$

$$\longrightarrow \quad \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{2^s} \right\rfloor \left\lfloor \frac{2^{(s+t)}}{d} \right\rfloor \frac{1}{2^t} \right\rfloor = \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{2^s} \right\rfloor \frac{2^{(s+t)}}{d} \frac{1}{2^t} \right\rfloor = \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{2^s} \right\rfloor \frac{2^s}{d} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$$

補足: 除算の最適化の例 (6/6)

前頁: (d が2の累乗数でない場合) の詳細 : d : 除数, x : 被除数, s, t : パラメータ

$$d, s, t, x \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le s, \quad 0 \le t, \quad 2^s \le d \le 2^{(s+t)}, \quad 2^{(s+t)} \not\equiv 0 \pmod d, \quad 0 \le x < \frac{2^{(s+t)}(d - 2^s)}{2^{(s+t)} \bmod d} + 2^s$$

$$\longrightarrow \quad -2^s \le x - 2^s < \frac{2^{(s+t)}(d - 2^s)}{2^{(s+t)} \bmod d} \qquad (-2^s \text{ を足す})$$

$$\longrightarrow \quad -2^s(2^{(s+t)} \bmod d) \le (x - 2^s)(2^{(s+t)} \bmod d) < 2^{(s+t)}(d - 2^s) \qquad ((2^{(s+t)} \bmod d) \text{ を掛ける})$$

$$\longrightarrow \quad 0 < 2^{(2s+t)} - 2^s(2^{(s+t)} \bmod d) \le (x - 2^s)(2^{(s+t)} \bmod d) + 2^{(2s+t)} < 2^{(s+t)} d \qquad (2^{(2s+t)} \text{ を足す})$$

$$\longrightarrow \quad -1 < -\frac{(x - 2^s)(2^{(s+t)} \bmod d) + 2^{(2s+t)}}{2^{(s+t)} d} \le -\frac{2^{(2s+t)} - 2^s(2^{(s+t)} \bmod d)}{2^{(s+t)} d} < 0 \qquad \left(-\frac{1}{2^{(s+t)} d} \text{ を掛ける}\right)$$

$$\longrightarrow \quad \left(\frac{x}{d} - 1\right) < \left(\frac{x}{d} - \frac{(x - 2^s)(2^{(s+t)} \bmod d) + 2^{(2s+t)}}{2^{(s+t)} d}\right) < \frac{x}{d} \qquad \left(\frac{x}{d} \text{ を足す}\right)$$

$$\longrightarrow \quad \left(\frac{x}{d} - 1\right) < \frac{(x - 2^s)(2^{(s+t)} - (2^{(s+t)} \bmod d))}{2^{(s+t)} d} < \frac{x}{d} \qquad \left(\frac{2^{(s+t)} - (2^{(s+t)} \bmod d)}{d} = \left\lfloor \frac{2^{(s+t)}}{d} \right\rfloor\right)$$

$$\longrightarrow \quad \left(\frac{x}{d} - 1\right) < \left(\frac{x - 2^s}{2^s} \left\lfloor \frac{2^{(s+t)}}{d} \right\rfloor \frac{1}{2^t}\right) < \left(\left\lfloor \frac{x}{2^s} \right\rfloor \left\lfloor \frac{2^{(s+t)}}{d} \right\rfloor \frac{1}{2^t}\right) \le \frac{x}{d} \qquad \left(\frac{x}{2^s} - 1 = \frac{x - 2^s}{2^s} < \left\lfloor \frac{x}{2^s} \right\rfloor \le \frac{x}{2^s}\right)$$

$$\longrightarrow \quad \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor - 1 \le \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{2^s} \right\rfloor \left\lfloor \frac{2^{(s+t)}}{d} \right\rfloor \frac{1}{2^t} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \qquad (\text{床関数 (floor) を適用})$$

A+Bから始める異常高速化

$$x \in \mathbb{Z},\ 0 \leq x < 2^{128} \quad \longrightarrow \quad \left\lfloor \frac{x}{10^{32}} \right\rfloor - 1 \leq \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{2^{64}} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{2^{128}}{10^{32}} \right\rfloor \times \frac{1}{2^{64}} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{x}{10^{32}} \right\rfloor$$

```rust
// 2^128 未満の整数 x の入力に対して floor(x / 10^32), (x mod 10^32) を計算
pub fn udivrem_1e32(x: u128) -> (u64, u128) {
    // (z0, z1) = (floor(x / 10^32), x mod 10^32)
    // floor((2^128)/(10^32)) = 3402823
    let mut z0 = ((((x >> 64) as u64 as u128) * 3402823) >> 64) as u64;
    let mut z1 = (x - (z0 as u128) * 100000000000000000000000000000000u128) as u64;
    if let Some(zt) = z1.checked_sub(10000000000000000000000000000000u64) {
        z1 = zt;
        z0 += 1;
    }
    (z0, z1)
}
```

```
# x86_64-unknown-linux-gnu
udivrem_1e32:
    mov     ecx, 3402823
    mov     rax, rsi
    mul     rcx
    mov     r8, rdx
    movabs  rcx, -5421010862428
    mov     r10, rdx
    imul    r10, rcx
    movabs  r9, 8814407033341083648
    mov     rax, rdx
    mul     r9
    add     r10, rdx
    add     rax, rdi
    adc     r10, rsi
    add     r9, rax
    adc     rcx, r10
    movabs  rdx, -8814407033341083649
    cmp     rdx, rax
    movabs  rdx, 5421010862427
    sbb     rdx, r10
    cmovae  rcx, r10
    cmovae  r9, rax
    adc     r8, 0
    mov     rax, r8
    mov     rdx, r9
    ret
```

```
# aarch64-unknown-linux-gnu
udivrem_1e32:
    mov     w8, #60487
    mov     x9, #18137646891008
    movk    w8, #51, lsl #16
    movk    x9, #31315, lsl #48
    mov     x10, #-16732
    mov     x13, #-18137646891009
    umulh   x8, x1, x8
    movk    x10, #53906, lsl #16
    movk    x10, #64273, lsl #32
    mov     x14, #16731
    movk    x13, #34220, lsl #48
    movk    x14, #11629, lsl #16
    umulh   x11, x8, x9
    movk    x14, #1262, lsl #32
    mul     x12, x8, x9
    madd    x11, x8, x10, x11
    adds    x12, x12, x0
    adc     x11, x11, x1
    adds    x9, x12, x9
    adc     x10, x11, x10
    cmp     x13, x12
    sbcs    xzr, x14, x11
    cinc    x0, x8, lo
    csel    x2, x10, x11, lo
    csel    x1, x9, x12, lo
    ret
```

A+Bから始める異常高速化

$$x \in \mathbb{Z},\ 0 \leq x < 10^{32} < 2^{107} \quad \longrightarrow \quad \left\lfloor \frac{x}{10^{16}} \right\rfloor - 1 \leq \left\lfloor \left\lfloor \frac{x}{2^{43}} \right\rfloor \times \left\lfloor \frac{2^{107}}{10^{16}} \right\rfloor \times \frac{1}{2^{64}} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{x}{10^{16}} \right\rfloor$$

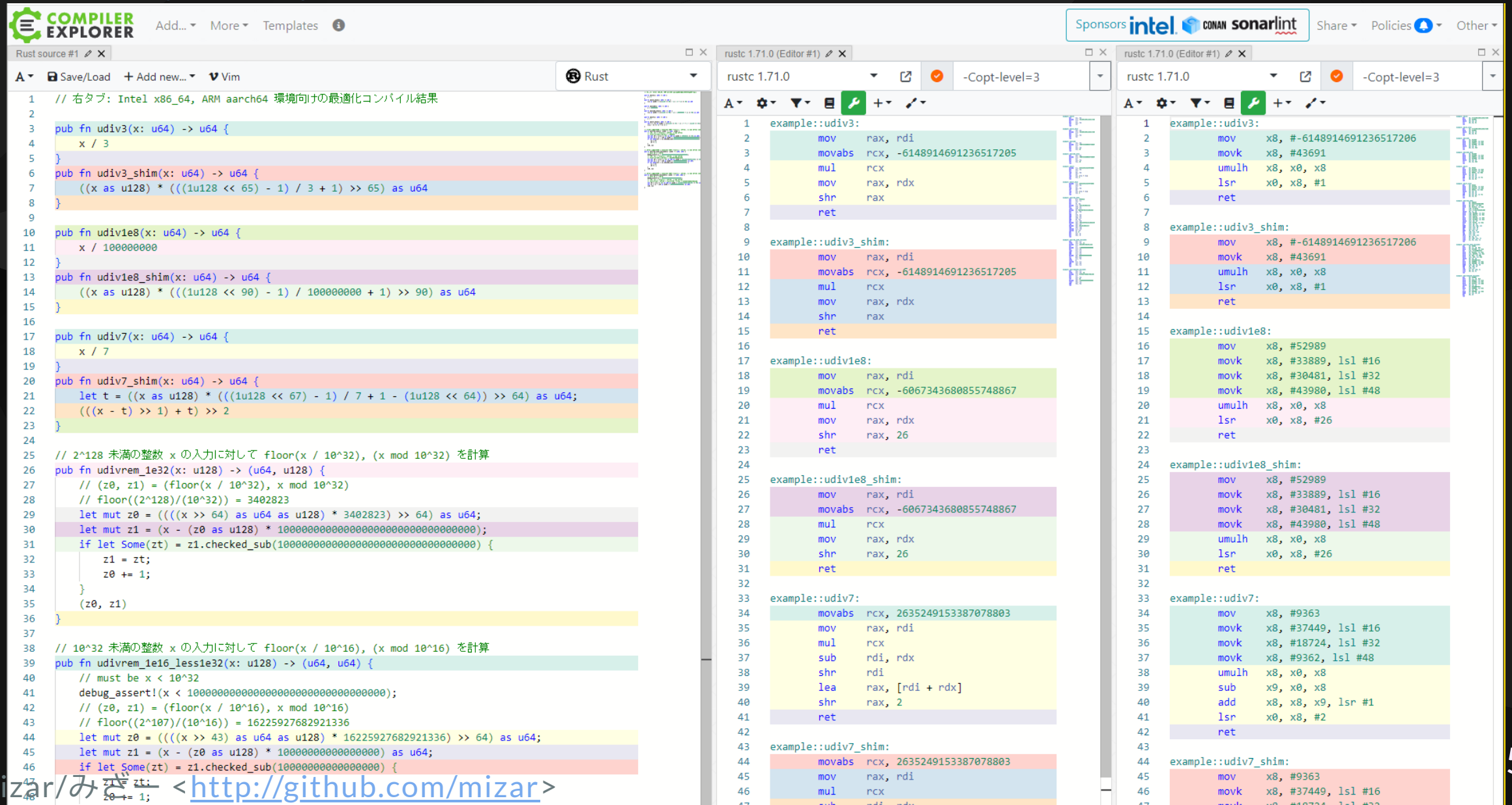
```rust
// 10^32 未満の整数 x の入力に対して floor(x / 10^16), (x mod 10^16) を計算
pub fn udivrem_1e16_less1e32(x: u128) -> (u64, u64) {
    // must be x < 10^32
    debug_assert!(x < 100000000000000000000000000000000);
    // (z0, z1) = (floor(x / 10^16), x mod 10^16)
    // floor((2^107)/(10^16)) = 162259276829213336
    let mut z0 = ((((x >> 43) as u64 as u128) * 162259276829213336) >> 64) as u64;
    let mut z1 = (x - (z0 as u128) * 10000000000000000) as u64;
    if let Some(zt) = z1.checked_sub(10000000000000000) {
        z1 = zt;
        z0 += 1;
    }
    (z0, z1)
}
```

```
# x86_64-unknown-linux-gnu
udivrem_1e16:
    mov     rax, rsi
    shld    rax, rdi, 21
    movabs  rcx, 162259276829213336
    mul     rcx
    movabs  rcx, -10000000000000000
    mov     rsi, rdx
    imul    rsi, rcx
    add     rsi, rdi
    add     rcx, rsi
    movabs  rdi, 9999999999999999
    xor     eax, eax
    cmp     rsi, rdi
    seta    al
    cmovbe  rcx, rsi
    add     rax, rdx
    mov     rdx, rcx
    ret
```

```
# aarch64-unknown-linux-gnu
udivrem_1e16:
    mov     x9, #4984
    extr    x8, x1, x0, #43
    movk    x9, #12209, lsl #16
    mov     x11, #-2420047873
    movk    x9, #42341, lsl #32
    movk    x11, #34546, lsl #32
    movk    x9, #57, lsl #48
    movk    x11, #35, lsl #48
    umulh   x8, x8, x9
    mov     x9, #2420047872
    movk    x9, #30989, lsl #32
    movk    x9, #65500, lsl #48
    madd    x10, x8, x9, x0
    add     x9, x10, x9
    cmp     x10, x11
    csel    x1, x9, x10, hi
    cinc    x0, x8, hi
    ret
```

A+Bから始める異常高速化

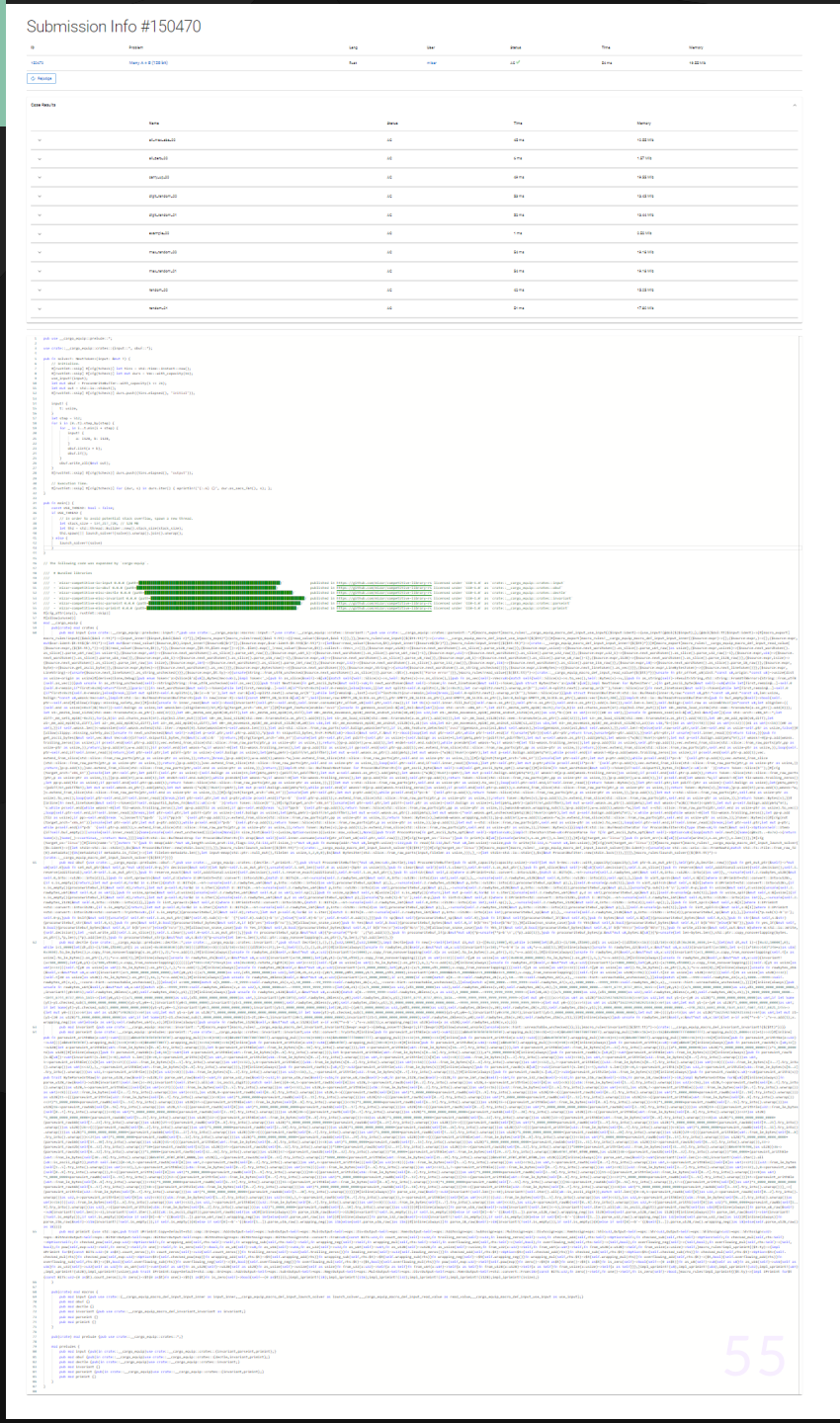
https://rust.godbolt.org/z/dW8xEYz4v



全部やった結果・まとめ

- CASE 1: 毎回println: 実行時間 537ms : https://judge.yosupo.jp/submission/149768
- CASE 2: BufWrite使用: 実行時間 222ms : https://judge.yosupo.jp/submission/149239
- CASE 3: 一度に読み込む: 実行時間 213ms : https://judge.yosupo.jp/submission/149269
- CASE 4: mmap使用: 実行時間 191ms : https://judge.yosupo.jp/submission/149279
- CASE 5: 整数入出力の改善など: 実行時間 54ms : https://judge.yosupo.jp/submission/150470

右図は、CASE5の提出結果とそのソースコードを表示したページのスクリーンショットです。



もっと速い実装

Many A + B (128bit) では半分の私の実装よりも半分の実行時間な投稿もあります。

こちらは入出力に10進数↔2進数の基数変換を用いず、10進数のままで加減算を行うという物なので、方向性は私の実装とはかなり異なるものです。

https://judge.yosupo.jp/submissions/?problem=many_aplusb_128bit&order=%2Btime&status=AC

Submission List

Many A + B (128 bit) | User | AC | Lang | Time | search

ID	Problem	Lang	User	Status	Time	Memory
141372	Many A + B (128 bit)	C++17	ovinus	AC ✓	26 ms	20.10 Mib
141280	Many A + B (128 bit)	C++17	ovinus	AC	26 ms	20.20 Mib
141282	Many A + B (128 bit)	C++17	ovinus	AC	26 ms	19.96 Mib
141279	Many A + B (128 bit)	C++17	ovinus	AC	29 ms	20.83 Mib
141278	Many A + B (128 bit)	C++17	ovinus	AC	35 ms	38.45 Mib
141272	Many A + B (128 bit)	C++17	ovinus	AC	37 ms	38.35 Mib
141271	Many A + B (128 bit)	C++17	ovinus	AC	42 ms	38.34 Mib
150470	Many A + B (128 bit)	Rust	mizar	AC ✓	54 ms	19.55 Mib
140021	Many A + B (128 bit)	Rust	mizar	AC ✓	55 ms	19.56 Mib
139988	Many A + B (128 bit)	Rust	mizar	AC ✓	56 ms	19.56 Mib
149637	Many A + B (128 bit)	Rust	mizar	AC ✓	65 ms	38.44 Mib

Fastest Submissions

Problem	Fastest
abc176_d - Wizard in Maze	#39583732 17ms mizarjp
abc177_e - Coprime	#39139951 23ms mizarjp
abc276_e - Round Trip	#36922510 10ms mizarjp
abc277_e - Crystal Switches	#36835455 35ms mizarjp
abc278_c - FF	#39521560 27ms mizarjp
abc282_d - Make Bipartite 2	#37363957 30ms mizarjp
abc282_e - Choose Two and Eat One	#39487837 11ms mizarjp
abc283_b - First Query Problem	#37591131 12ms mizarjp
abc283_e - Don't Isolate Elements	#37589533 11ms mizarjp
abc284_d - Happy New Year 2023	#37871413 3ms mizarjp
abc285_d - Change Usernames	#38145408 24ms mizarjp
abc287_d - Match or Not	#38441125 11ms mizarjp
abc287_e - Karuta	#38546029 35ms mizarjp
abc289_d - Step Up Robot	#38825162 6ms mizarjp
abc289_f - Teleporter Takahashi	#38877573 15ms mizarjp
abc290_c - Max MEX	#39049092 12ms mizarjp
abc290_d - Marking	#39049375 26ms mizarjp

Problem	Fastest
abc293_d - Tying Rope	#39908999 25ms mizarjp
abc293_f - Zero or One	#39667931 6ms mizarjp
abc293_g - Triple Index	#39893894 161ms mizarjp
abc294_c - Merge Sequences	#39893227 17ms mizarjp
abc294_d - Bank	#39920030 17ms mizarjp
abc296_c - Gap Existence	#40275393 19ms mizarjp
abc298_f - Rook Score	#40687882 57ms mizarjp
abc300_d - AABCC	#41063134 5ms mizarjp
abc302_d - Impartial Gift	#41565791 36ms mizarjp
abc304_e - Good Graph	#41968115 54ms mizarjp
abc305_d - Sleep Log	#42177274 68ms mizarjp
abc307_e - Distinct Adjacent	#42932150 2ms mizarjp
arc152_b - Pass on Path	#37894497 11ms mizarjp
arc158_b - Sum-Product Ratio	#39710167 14ms mizarjp
arc158_c - All Pair Digit Sums	#39731553 58ms mizarjp
tessoku_book_h - Two Dimensional Sum	#37536471 31ms mizarjp
tupc2022_a - Sum Sort	#39400989 7ms mizarjp
tupc2022_c - Flip Grid	#39452326 52ms mizarjp

まとめ

- Rust は標準で何でもかんでも速いわけじゃない
  - エラーチェックや汎用化の都合などで、専用に最適化したものより遅い事も
- Rust は安全に書くこともできる言語ですが、敢えてそれを踏み外す事もできる
  - FFI (foreign function interface)、インラインアセンブラ、生ポインタ、etc.
  - 注意深く使えば、 unsafe な部分の悪影響を極小化しつつ、いろいろできる...かも?
- 異常高速化の世界へようこそ!
  - でも、不要不急の高速化を無理に試みなくても大丈夫です。たぶん。

参考資料

今回は使用していませんが、このような実装も存在するという紹介です。

- 文字列→float (C++) : https://github.com/fastfloat/fast_float
- float→文字列 (C++) : https://github.com/jk-jeon/dragonbox
- 文字列→int (Rust) : https://github.com/pacman82/atoi-rs
- int→文字列 (Rust) : https://github.com/dtolnay/itoa
- 文字列→float (Rust) : https://github.com/aldanor/fast-float-rust
- float→文字列 (Rust) : https://github.com/dtolnay/dragonbox
- 除算/剰余算の特殊化アルゴリズム (Rust) : https://github.com/AaronKutch/specialized-div-rem

VRC競プロ部 案内

- 主に土曜23時頃~ (AtCoder Beginner Contest (ABC) 開催日) ABC感想会
  - AtCoder Beginner Contest にリアルタイムで参加した人たちで集まって、 Group+ インスタンスにてわいわいと感想会をやっています。初めての方は Discord / VRChat Group に参加しておいた方がスムーズだと思います。
  - https://discord.gg/VDQMrAb
  - https://vrc.group/PROCON.7592
- 主に日曜夜 (コンテストがない週): テーマ別勉強会
- 2023-06開催 SECCON Beginners CTF 2023 に `VRC-procon` チームで参加 (20位)

VRC競プロ部 コンテスト

2023-07-21(金)21:20 ~ 23:20 yukicoder にて
https://yukicoder.me/contests/447

私は A 問題のWriterとして作問に参加しました。今回の A 問題 は AtCoder Beginner Contest での B問題 程度の難易度を想定しています。

リアルタイムでの参加はもちろん、都合が合わない、難しすぎた、という方でも、問題や解説を後で見るだけでも、皆さんに楽しんで頂けたらと思います。

右上: 今回 2023-07-21開催

右下: 前回 2023-05-26開催

Mizar/みざー <http://github.com/mizar>

A+Bから始める異常高速化

yukicoder contest 概要

2023-07-21 21:20:00〜2023-07-21 23:20:00 (2h)のコンテストです。
参加登録などはありません。問題が公開されたら、回答を提出すれば大丈夫です。
誤回答によるペナルティーはありません。

#	ナンバー	問題名	レベル	作問者	テスター	Solved	Fav
A	9999	問題名非公開	★1	Mizar	amentorimaru PCTprobability tatyam	3	0
B	9999	問題名非公開	★2	GlinTFraulein	amentorimaru 妹尾 Mizar PCTprobability tatyam	5	0
C	9999	問題名非公開	★3	妹尾	amentorimaru PCTprobability Mizar tatyam	5	0
D	9999	問題名非公開	★3	seekworser	PCTprobability amentorimaru Mizar	3	0
E	9999	問題名非公開	★3	獅子座じゃない人	PCTprobability amentorimaru 妹尾 Mizar	3	0
F	9999	問題名非公開	★3.5	GlinTFraulein	amentorimaru 妹尾 Mizar PCTprobability tatyam	5	1
G	9999	問題名非公開	★4	PCTprobability	tatyam amentorimaru 妹尾 Mizar	3	1

コンテスト情報

VRC競プロ部によるコンテストになります。今度はWriterがごった煮でございます！

VRC競プロ部について

https://yukicoder.me/contests/447
https://twitter.com/cleantted_s/status/1226803108086312964

A+Bから始める異常高速化

```rust
#[inline]
pub fn parseuint_arith8le(a: u64) -> u64 {
    (((((a & 0x0f0f0f0f0f0f0f0f).wrapping_mul((10 << 8) + 1) >> 8) & 0x00ff00ff00ff00ff)
        .wrapping_mul((100 << 16) + 1) >> 16) & 0x0000ffff0000ffff)
        .wrapping_mul((1_0000 << 32) + 1) >> 32
}
#[inline]
pub fn parseuint_arith8be(a: u64) -> u64 {
    (((((a & 0x0f0f0f0f0f0f0f0f).wrapping_mul((1 << 8) + 10) >> 8) & 0x00ff00ff00ff00ff)
        .wrapping_mul((1 << 16) + 100) >> 16) & 0x0000ffff0000ffff)
        .wrapping_mul((1 << 32) + 1_0000) >> 32
}
#[inline]
pub fn parseuint_arith4le(a: u32) -> u32 {
    (((a & 0x0f0f0f0f).wrapping_mul((10 << 8) + 1) >> 8) & 0x00ff00ff).wrapping_mul((100 << 16) + 1) >> 16
}
#[inline]
pub fn parseuint_arith4be(a: u32) -> u32 {
    (((a & 0x0f0f0f0f).wrapping_mul((1 << 8) + 10) >> 8) & 0x00ff00ff).wrapping_mul((1 << 16) + 100) >> 16
}
#[inline]
pub fn parseuint_arith2le(a: u16) -> u16 {
    (a & 0x0f0f).wrapping_mul((10 << 8) + 1) >> 8
}
#[inline]
pub fn parseuint_arith2be(a: u16) -> u16 {
    (a & 0x0f0f).wrapping_mul((1 << 8) + 10) >> 8
}
#[inline(always)]
pub fn parseuint_arith1(a: u8) -> u8 {
    a & 0x0f
}
```