

Constraints Canonical Theory

# 特異系の正準理論

発表者 けちゃっぷ

# お品書き

- そもそもどういう問題？
- 解析力学って何？
- 特異系の正準理論
- 光の自由度はなぜ2つ？
- 時間の進め方は自由？
- まとめ

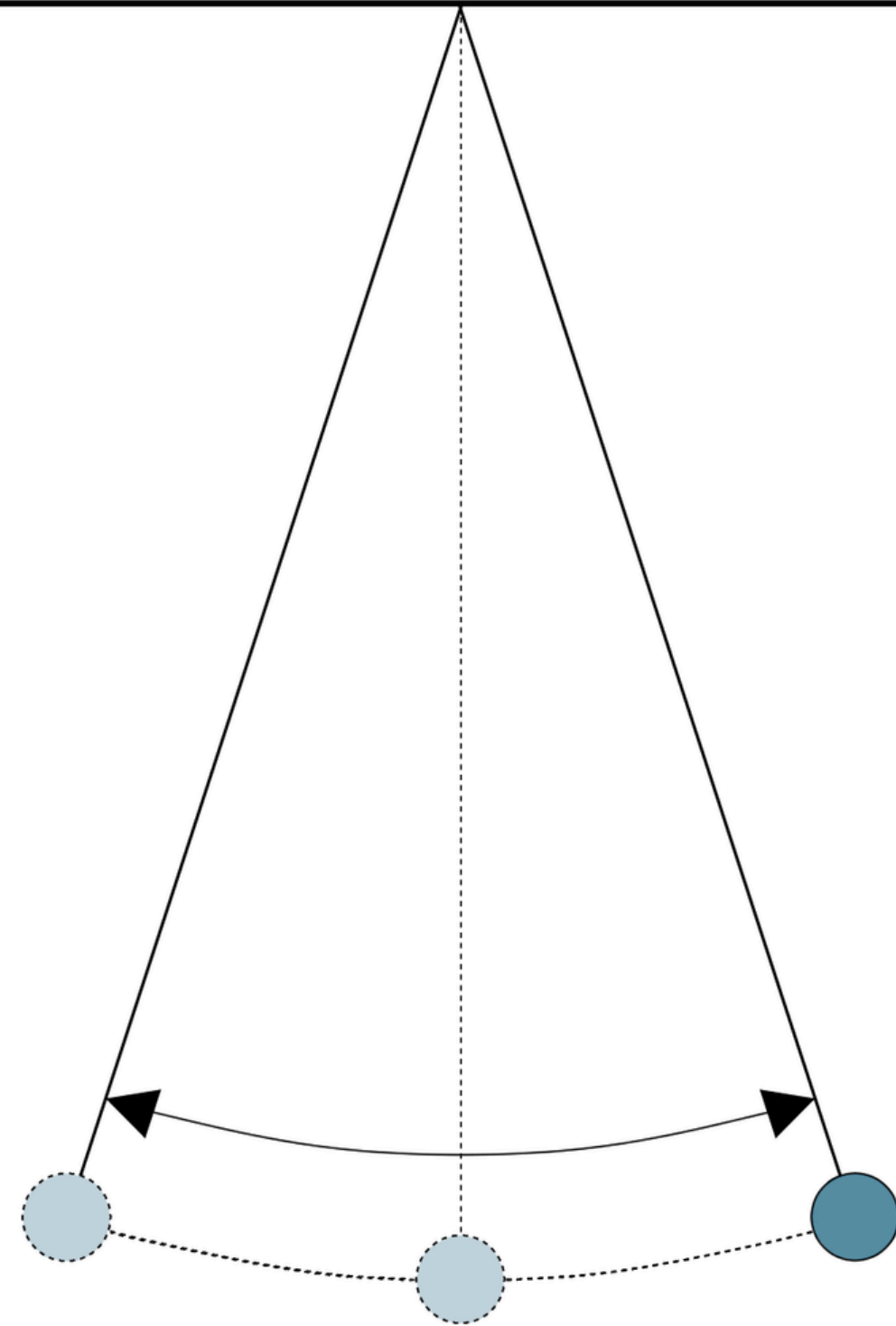
そもそもそもそもどういう問題？

# 今日話すこと

物理学は座標の選択によらずに成り立ってほしい

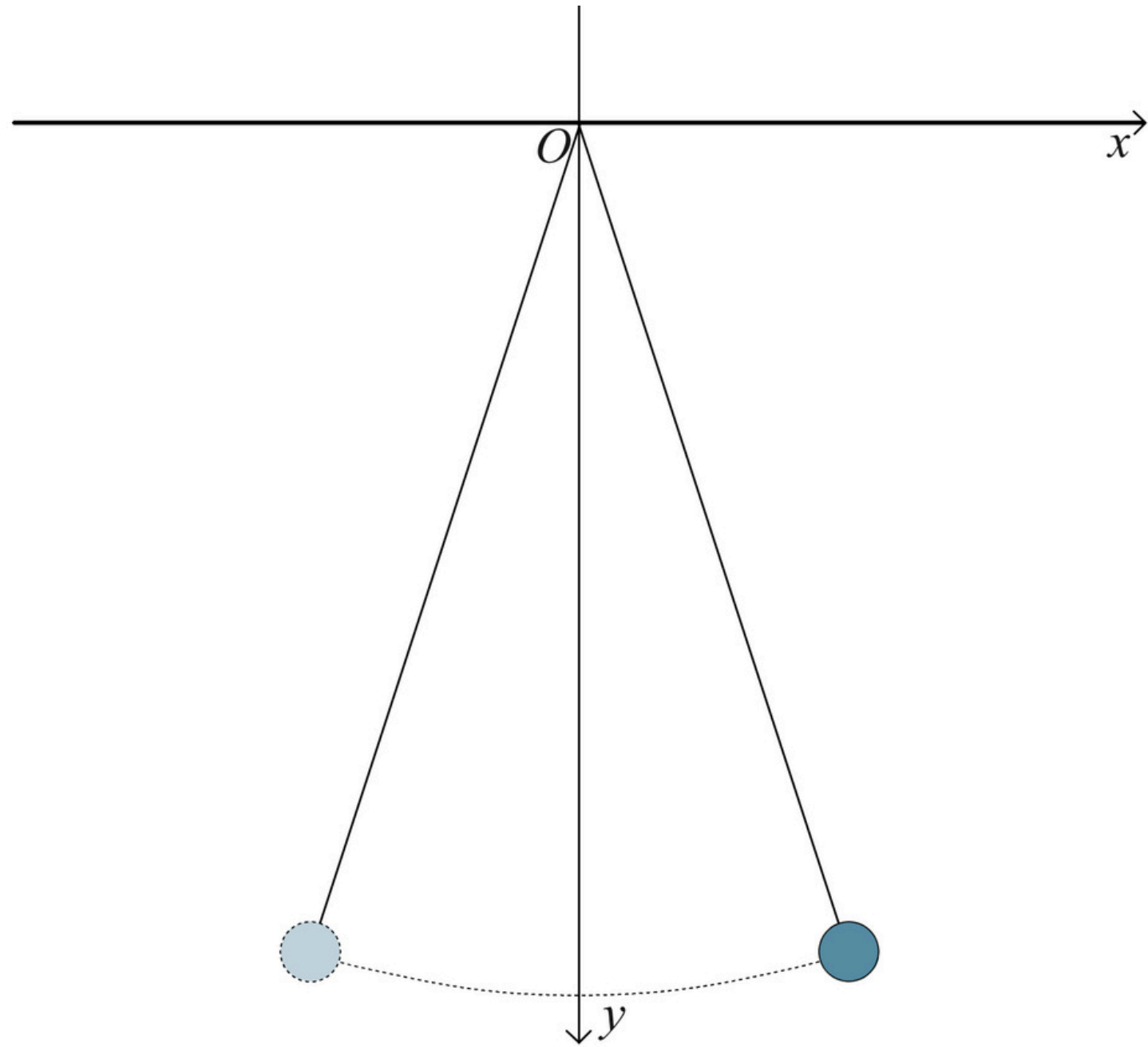
# 具体例から その1

振り子の問題は  
どう解けばいいのだろうか？

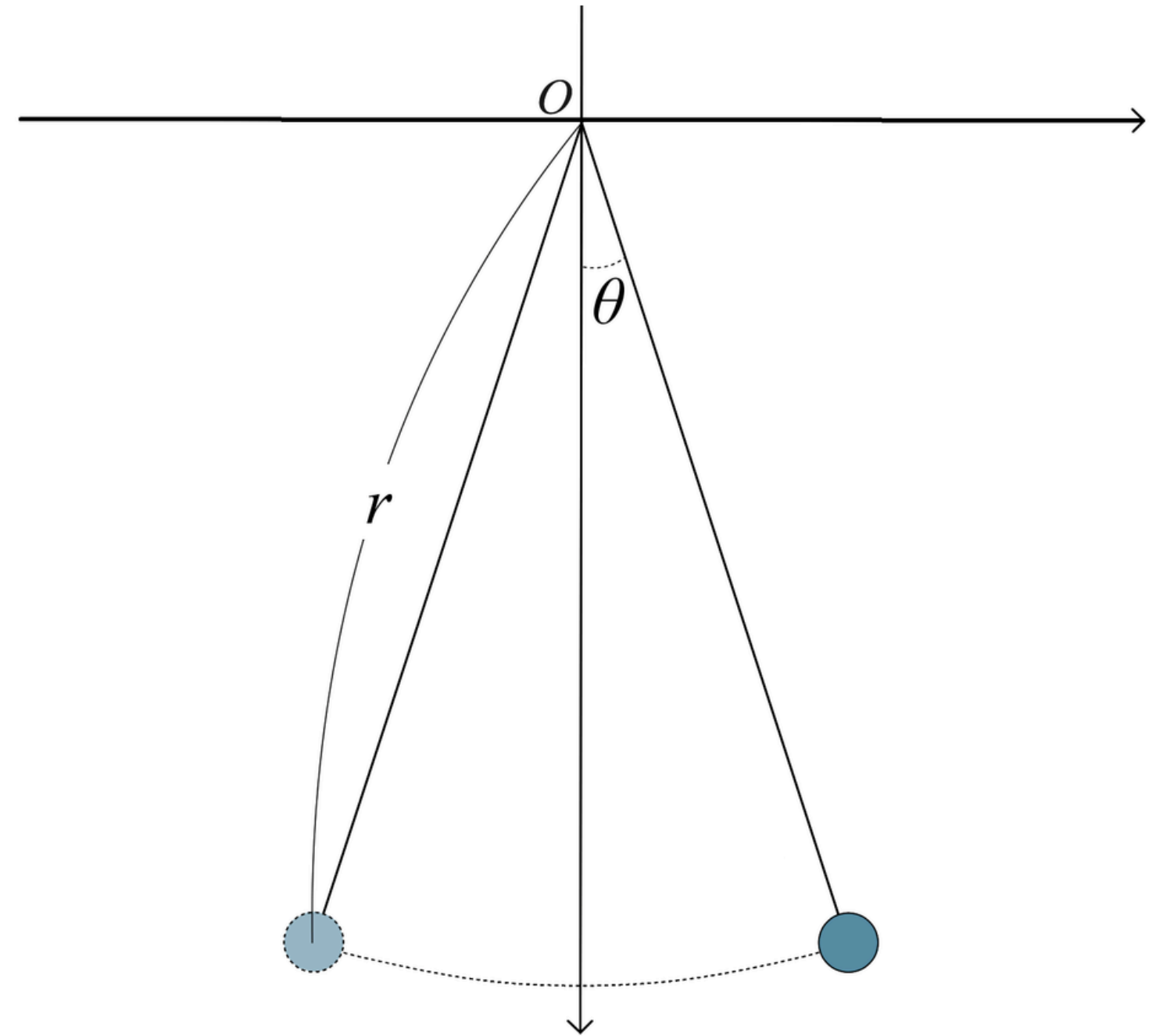


# 具体例から その2

xy座標



極座標



座標系を2種類選んでみる

# 具体例から その3

xy座標

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -T_x$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - T_y$$

$$x^2 + y^2 = l^2$$

極座標

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

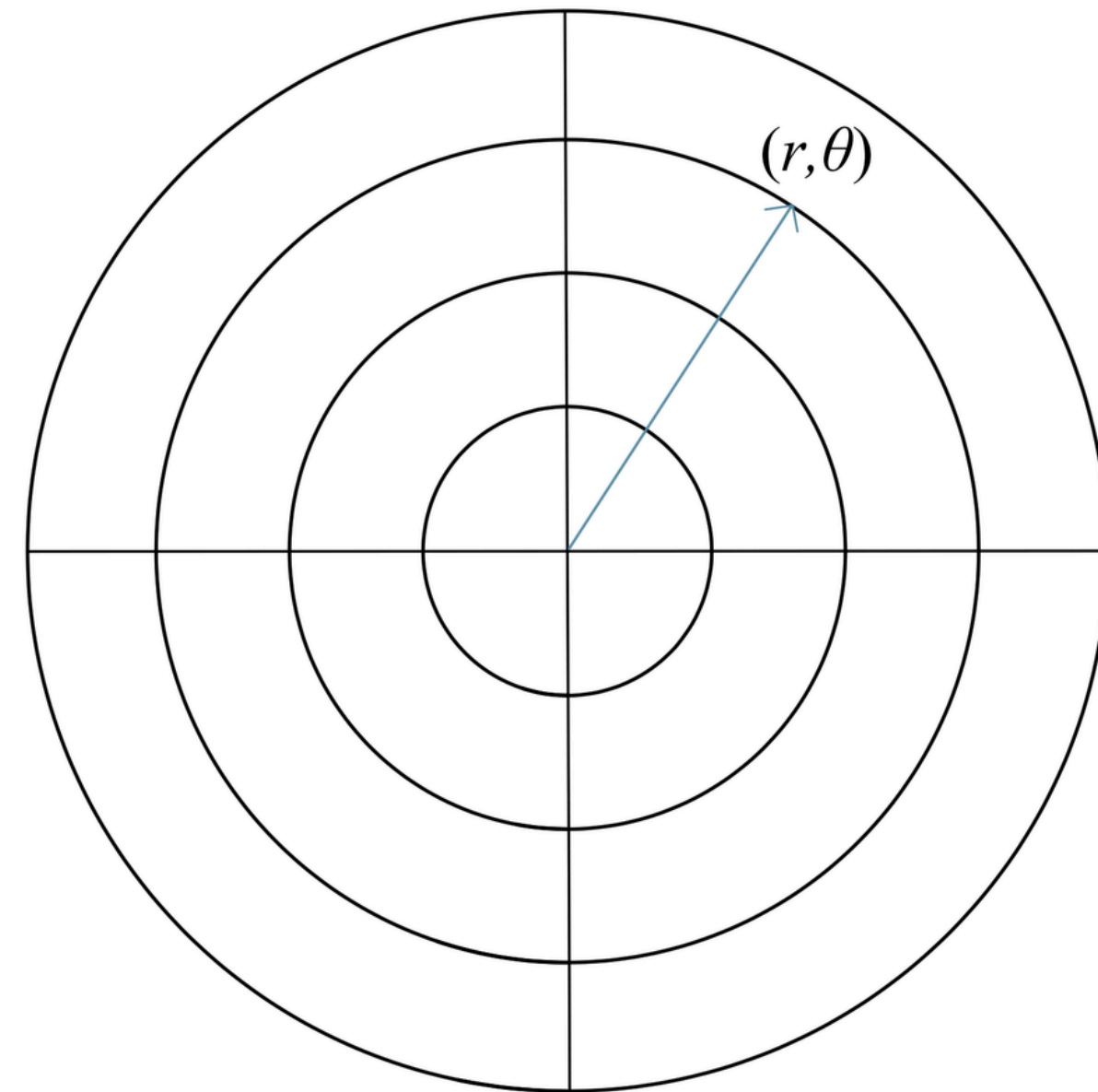
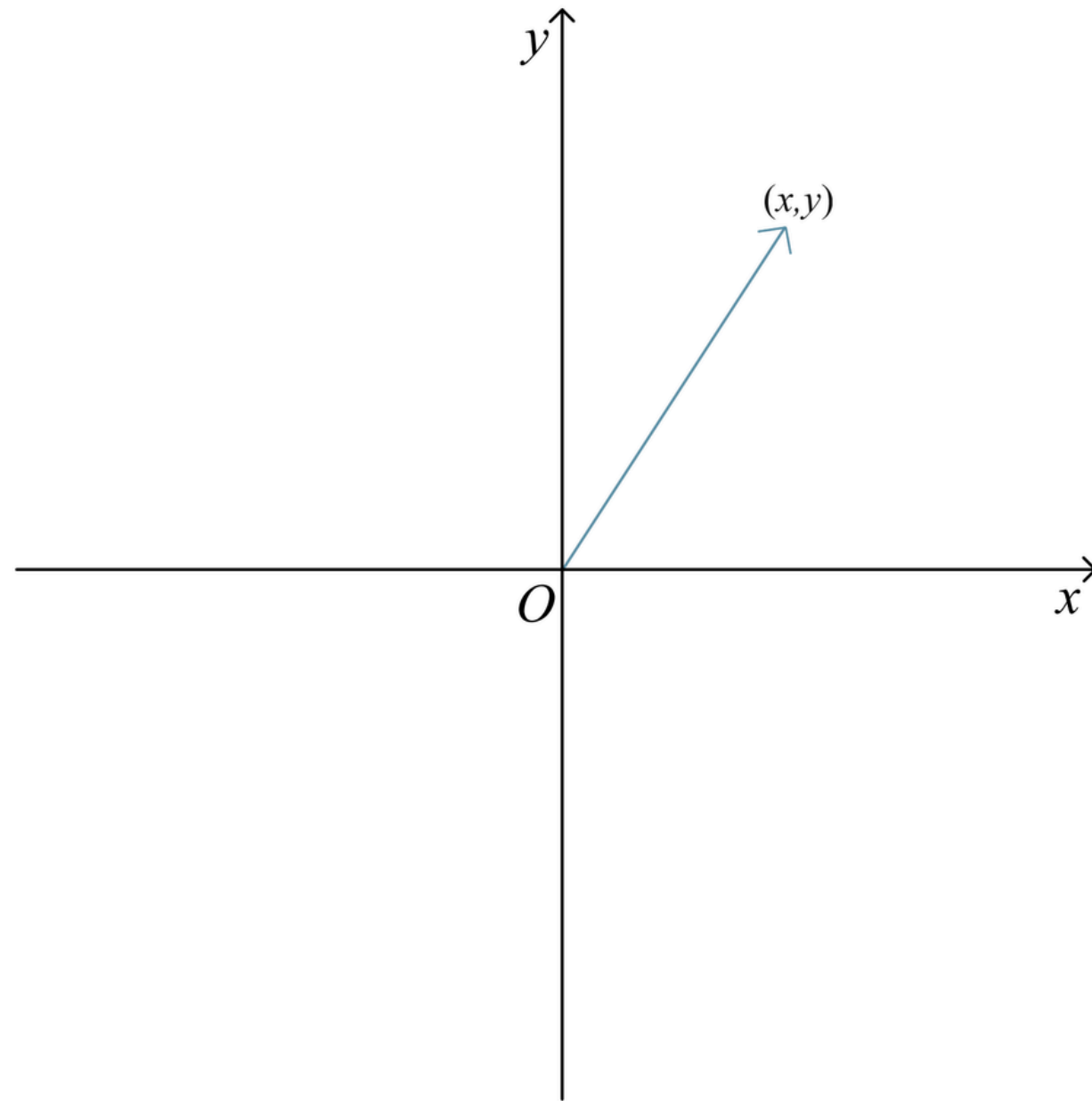
座標の取り方によって見た目が全然違う！

振り子の運動は1次元？2次元？

解析力学って何？

# 解析力学 その1

解析力学なら、どんな座標系を選んでも方程式の形は変わらない!



# 解析力学 その2

古典力学では、ラグランジアンは  
運動エネルギー  $T$  とポテンシャルエネルギー  $V$  の差で与えられる

$$L = T - V$$

オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) = 0$$

解析力学ではこれを解くだけでいい！

# 機械的に方程式を解く

$$L = T - V$$

$$\rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right) = 0$$

機械的に方程式が解けた！

# 正準理論 その1

解析力学にはもう一つ便利な形がある！

ハミルトニアン  $H$  を次のように作る

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

$$H(q, p, t) = p\dot{q}(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)$$

# 正準理論 その2

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q}$$

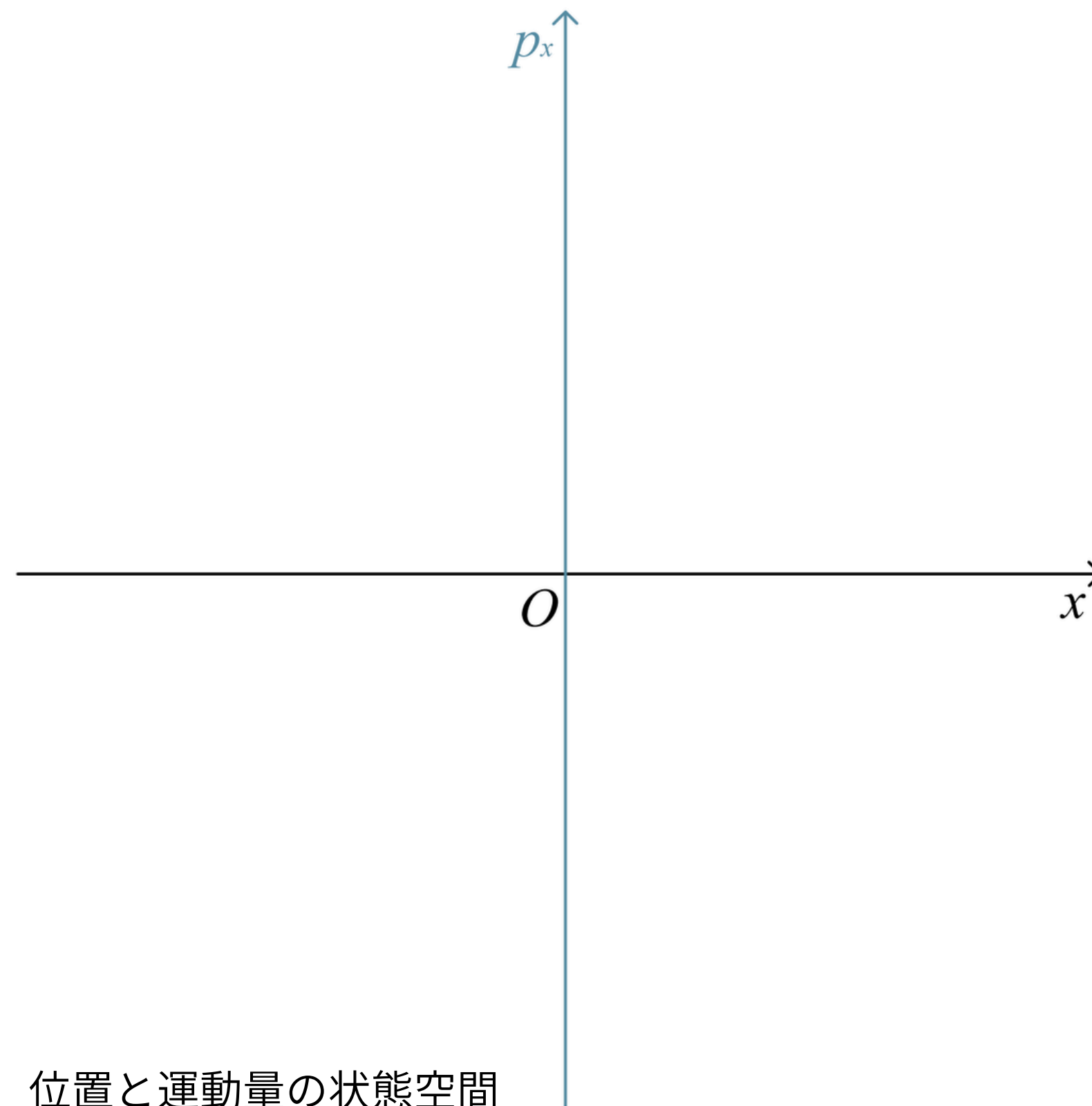
好きな物理量  $A$  の運動方程式を以下のように表せる

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\}$$

位置でも運動量でもこれ一つで表せる！

# 正準理論 その3

位置と運動量から未来は決まる！



# 正準理論 その4

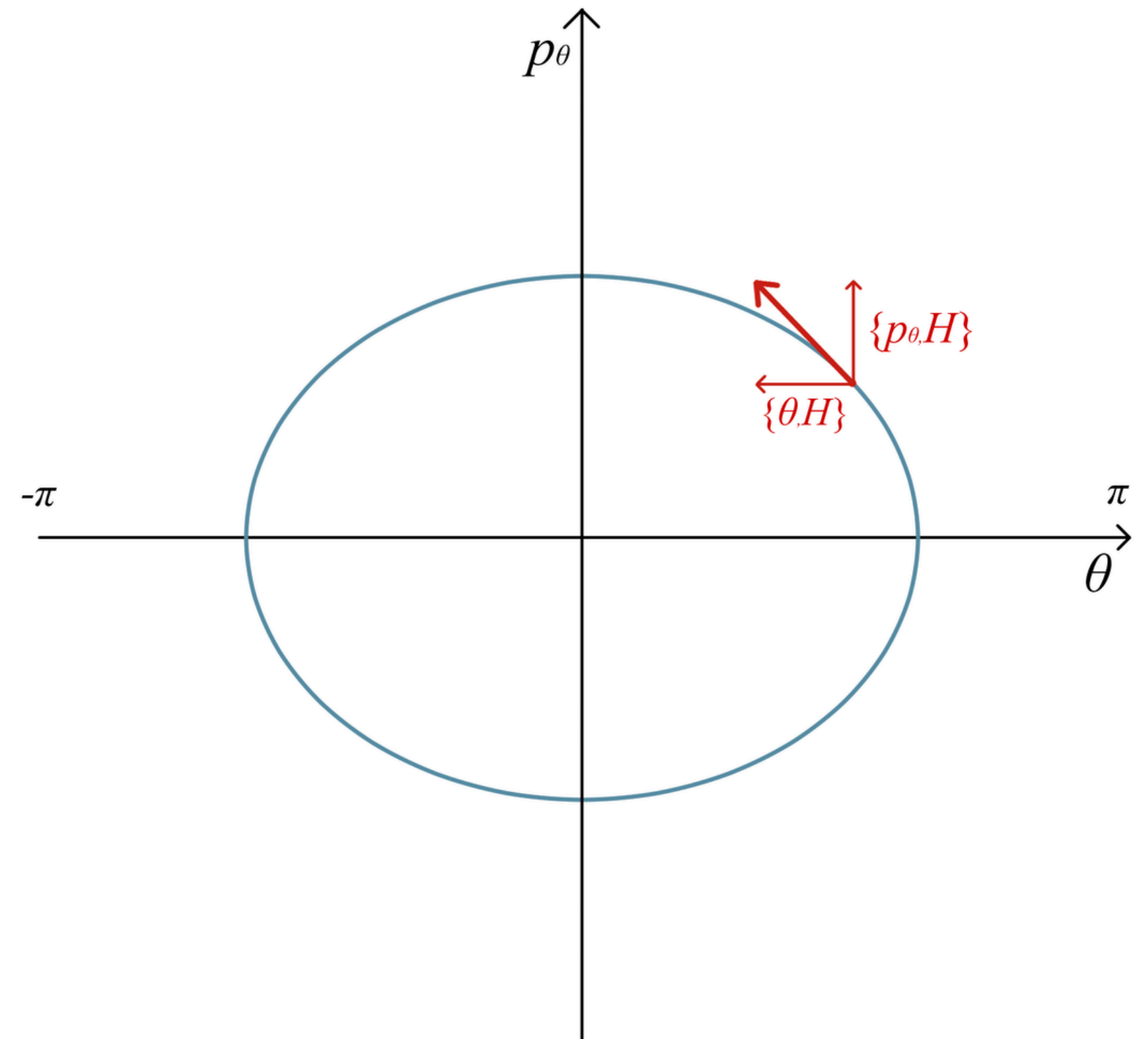
正準理論で振り子を解いてみよう

$$H(\theta, p_\theta) = \frac{1}{2ml^2} p_\theta^2 - mgl \cos \theta$$

$$\dot{\theta} = \{\theta, H\} \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

$$\dot{p}_\theta = \{p_\theta, H\}$$

やっぱり機械的に方程式を作れた！



二次元空間をぐるぐる回る軌道になる

# 解析力学は万能？

解析力学は自由に座標を選べる理論

座標に $xy$ 座標を使ったらどうだろうか？

# ラグランジュの未定乗数法 その1

紐の長さが変わらないという条件を

ラグランジアンに追加する

$$L(q, \dot{q}, t, \lambda) = L(q, \dot{q}, t) + \lambda(\text{拘束条件})$$

$\lambda$ も新しい座標として扱う

# ラグランジュの未定乗数法 その2

極座標では1次元、 $xy$ 座標では3次元

条件を入れると座標の数が増えてしまった！？

# ラグランジュの未定乗数法 その3

ハミルトニアンを作るために運動量を作ろうとすると

$$p_\lambda = 0$$

これではハミルトニアンが作れない

解析力学は万能じゃない？

# 特異系の正準理論

# 特異系ってなに？

運動量を座標の時間微分で表せない系のこと！

振り子では運動量  $p_\lambda$  が  $\lambda$  の時間微分で表せなかった

# ディラックが考えたこと

座標を選ぶ前から物事は存在している  
でも座標の選び方で物理ができなくなるのは  
おかしい！

理論がまだ不十分なんだ！



# ディラックアルゴリズム その1

1. 拘束条件を探す
2. 時間発展をして矛盾がないか調べる
3. 本当の次元を取り出す

# ディラックアルゴリズム その2

$$(\text{元の次元}) - \frac{1}{2}(\text{条件の数}) = (\text{本当の次元})$$

アルゴリズムで得られた条件の数から運動が何次元かがわかる！

# アルゴリズムからわかること その1

アルゴリズムを使って振り子の拘束条件を全部書き出すと

$$p_\lambda = 0$$

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

$$xp_x + yp_y = 0$$

$$\lambda - \frac{1}{2(x^2 + y^2)} (mgy - \frac{1}{m}(p_x^2 + p_y^2)) = 0$$

拘束条件が4つ得られた！

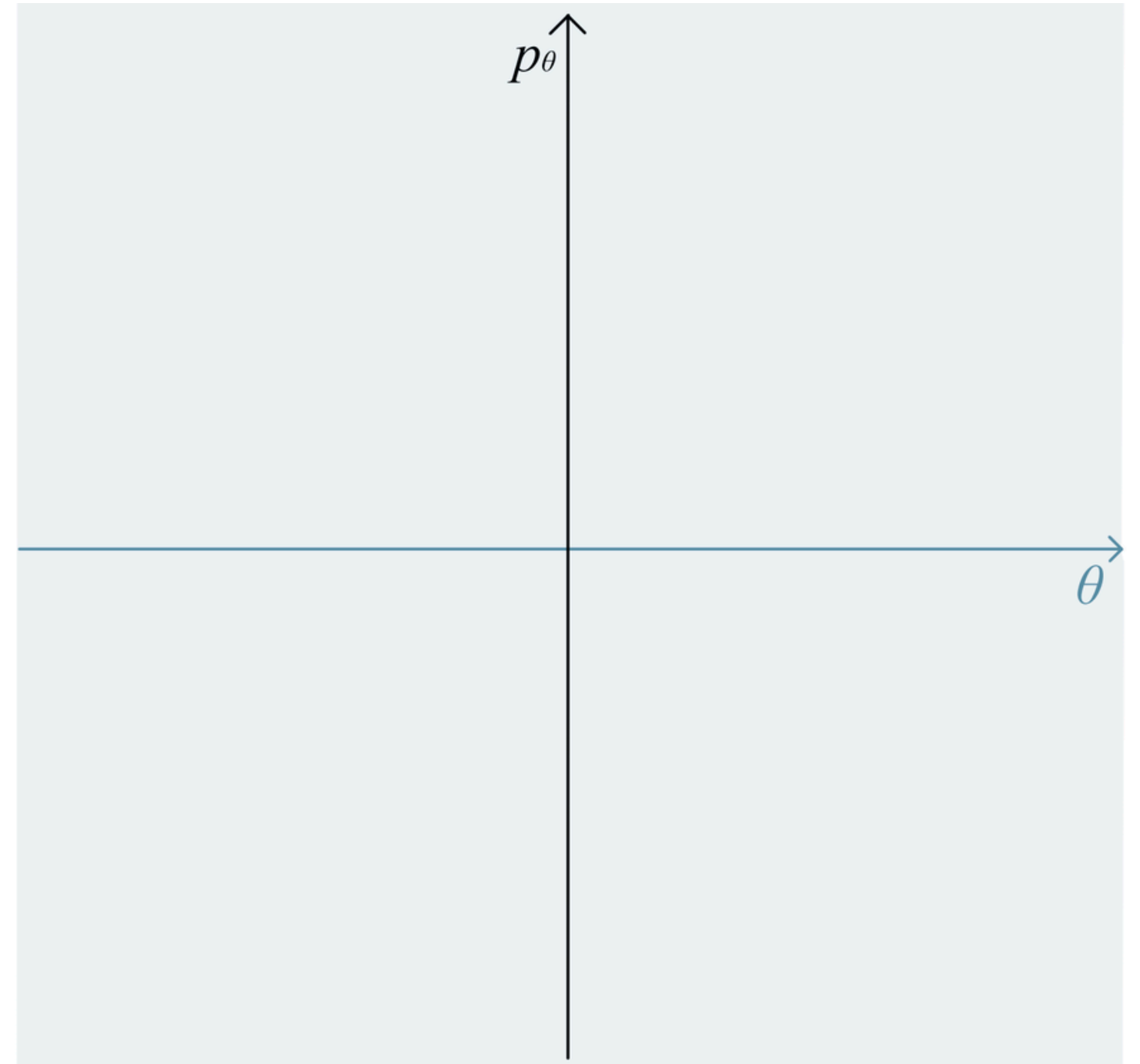
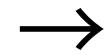
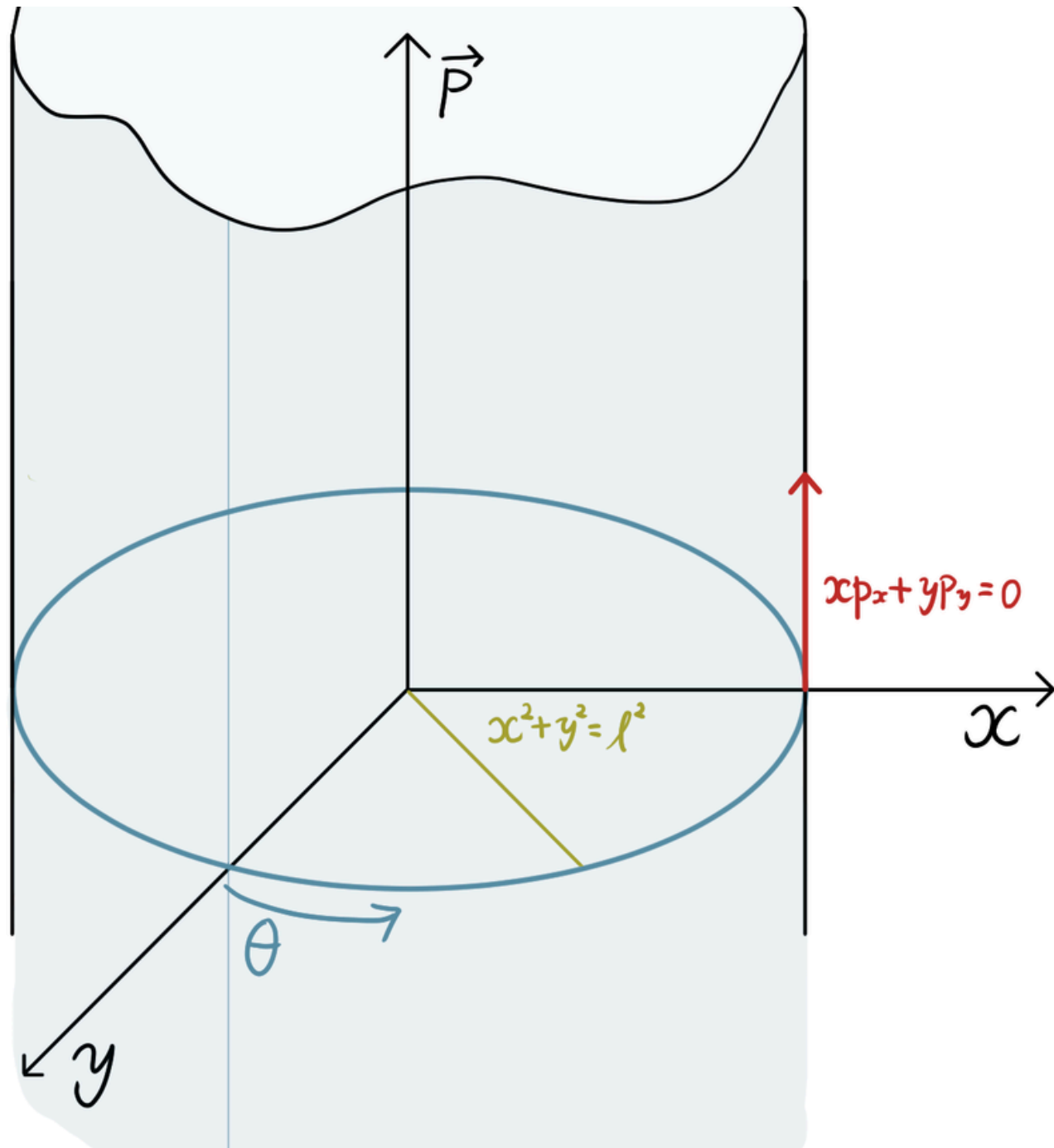
# アルゴリズムからわかること その2

$$(\text{元の次元}) - \frac{1}{2}(\text{条件の数}) = (\text{本当の次元})$$

$$\rightarrow (3) - \frac{1}{2}(4) = 1$$

振り子の運動は1次元！

# アルゴリズムからわかること その3



条件によって運動が制限された!

# 正準理論まとめ

ディラックのアルゴリズムを使えばどんな座標を使っても

運動の本当の姿がわかる！

光の自由度はなぜ二つ？

# 光を記述するもの

光は四つの成分で表される

$$(\phi, A_1, A_2, A_3)$$

成分は4つあるのに本当の自由度は2つ！

# 光の拘束条件

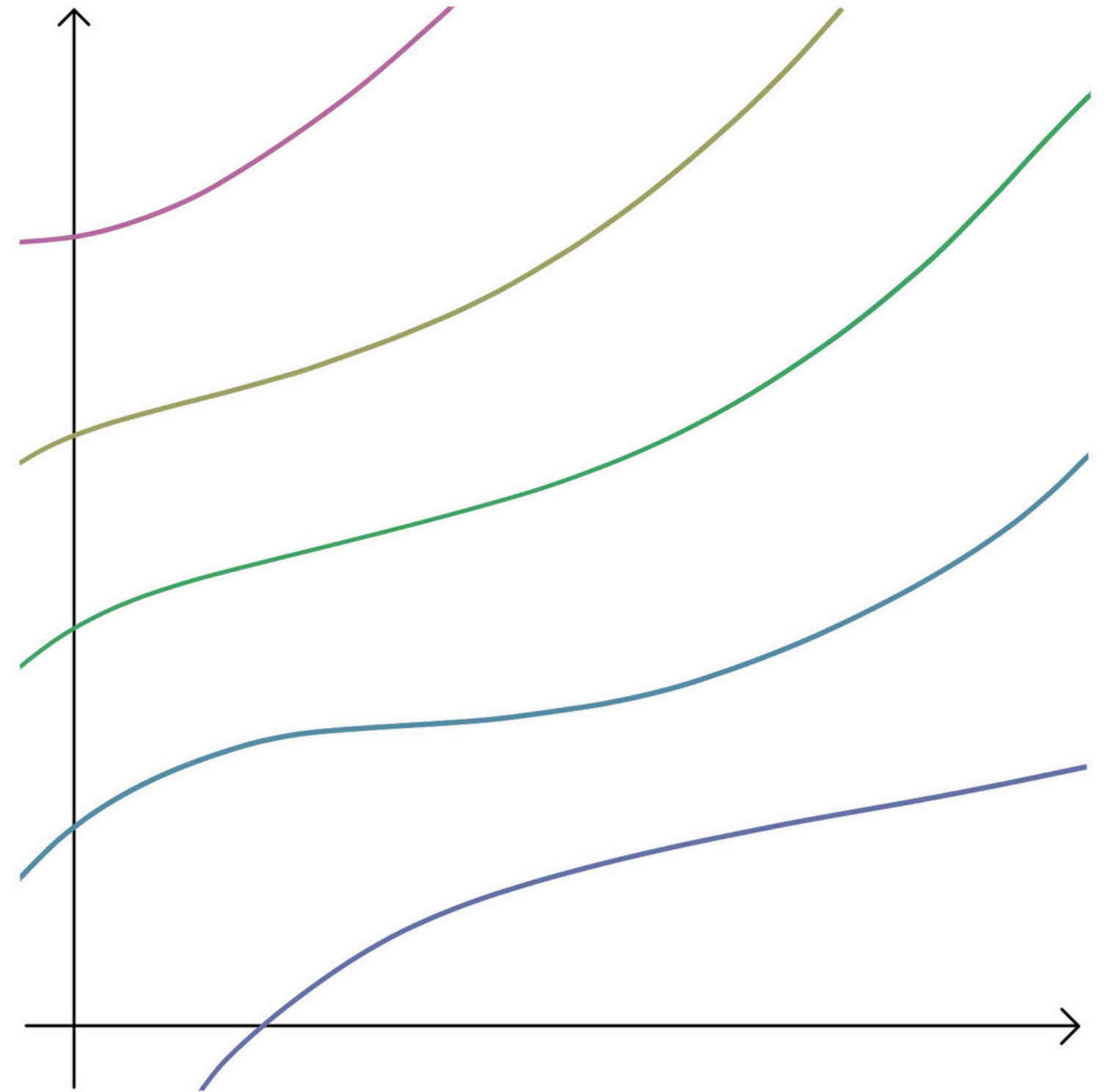
$$P_\phi = 0$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} - \rho = 0$$

拘束条件は二つだけ  
でもこれだけじゃ運動は決まらない！

# ゲージ対称性？

物理的に同じ状況がたくさんある！

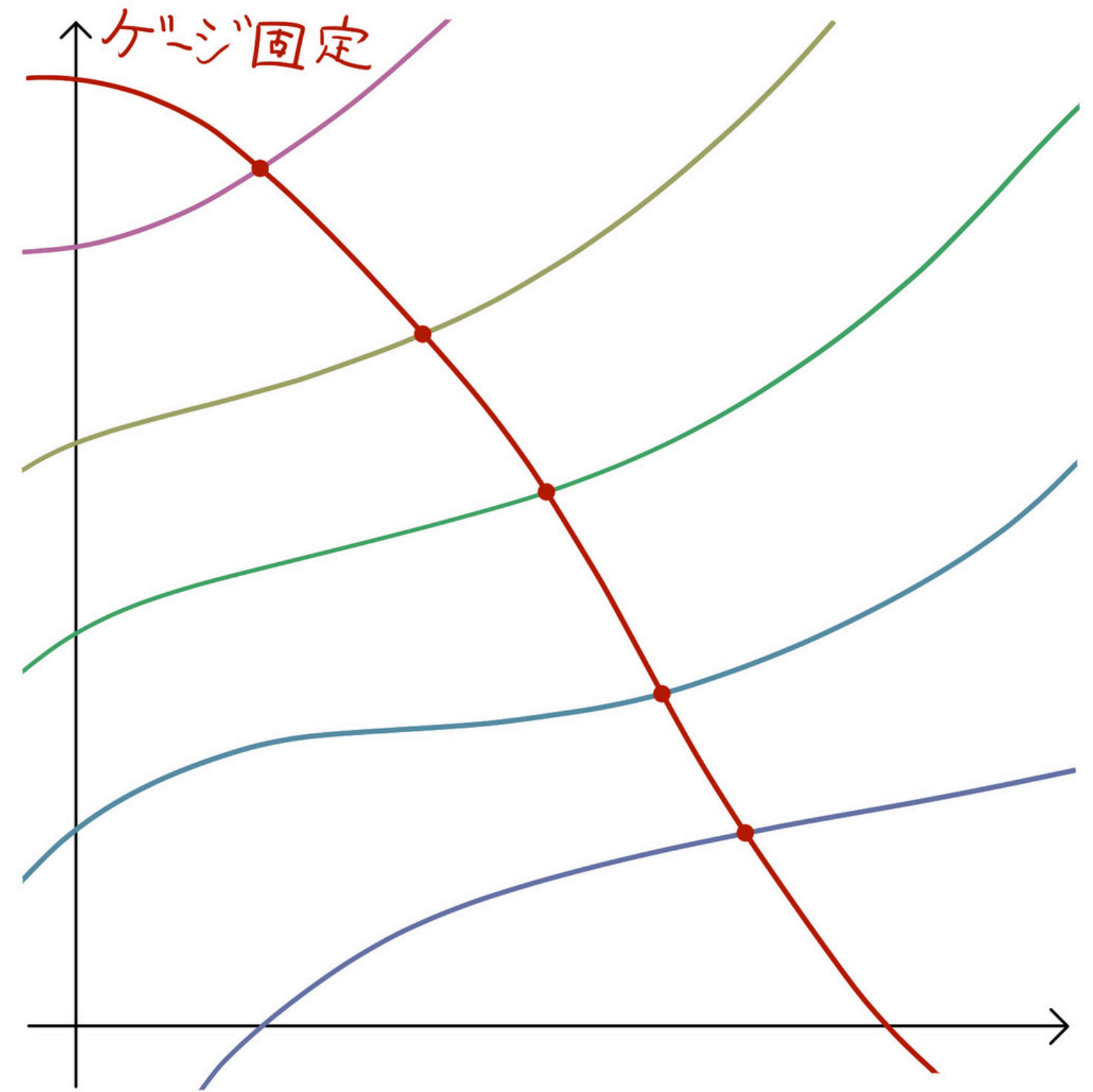


同じ色が同じ物理を表している

# 好きに決めよう

同じ色の中なら何を選んでも一緒！

→ 自分で一つ条件を決められる！



ゲージ固定

# 光の自由度

冗長な拘束条件一つにつき一つ条件を追加する

$$(\text{元の次元}) - \frac{1}{2} \{ (\text{拘束条件の数}) + (\text{ゲージ固定の数}) \} = (\text{本当の次元})$$

$$4 - \frac{1}{2} (2 + 2) = 2$$

光の自由度は2つ！

時間の進め方は自由？

# 相対性理論を記述するもの

$$(t, x, y, z)$$

時間も座標の一部になってる？

# 相対性理論の拘束条件

$$H = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = 0$$

$$g^{\mu\nu} p_\nu p_\mu + m^2 = 0$$

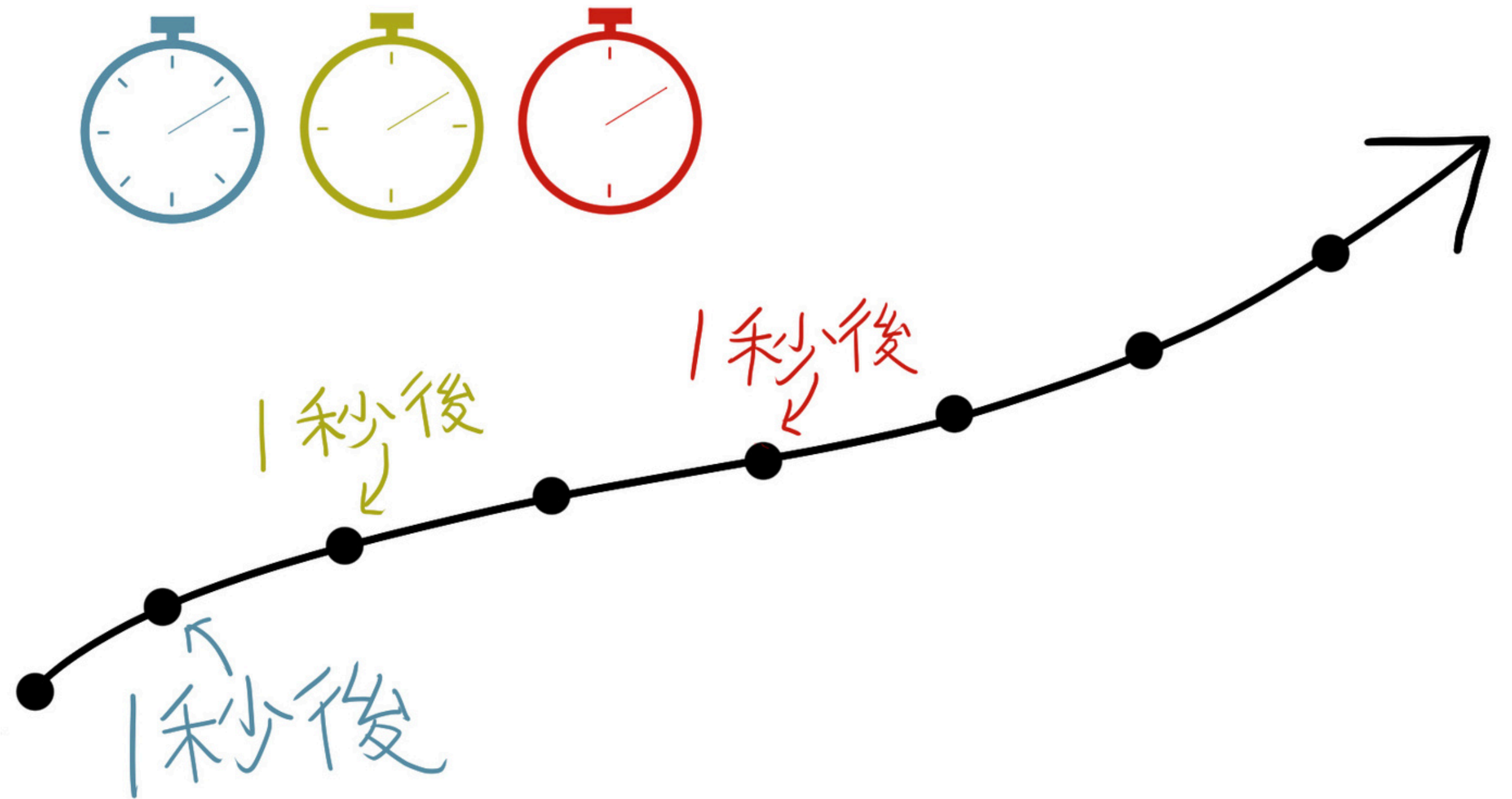
時間の進め方を決めるはずのハミルトニアンが  
0 になってしまった!

→ それでも時間は進むはず!

# 時間発展はゲージ変換？

1秒の長さを決めて  
あげれば解決！

時間の長さは  
自由に選べる！



まとめ

# まとめ

物理は座標を選ぶ前から存在している

特異系の正準理論は、何が物理で何が記述の自由か見分ける理論

おわり！

# 参考文献

- 渡辺佑樹 著 解析力学 ―基礎の基礎から発展的なトピックまで―

ISBN978-4-320-03631-4

- 朔望カヤ Youtube Channel

<https://www.youtube.com/@朔望カヤ>