

14 四元数による姿勢制御と被覆空間

姿勢制御の方法、四元数、被覆空間の理論

めたち (@Metachick_2021)

VRC 数学談話会主催

目次

1|A

姿勢制御の基礎知識

- 姿勢とは何か？
- 3つの表現方法
- Euler 角と行列表示の弱点

2|B

四元数とは何か？

- 四元数の定義
- 四元数による回転の表現

3|B

被覆空間の理論

- 被覆空間の紹介
- 被覆空間のガロア理論
- なぜ四元数なのか？

「今日は unity でもよく見る、^{quaternion}四元数について話します！」

1 | A

姿勢制御の基礎知識

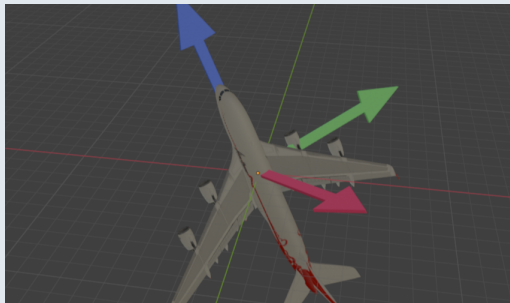
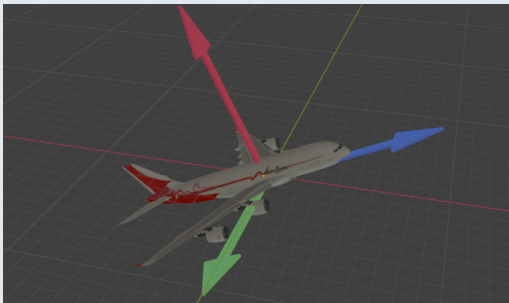
回転行列・Euler 角・四元数

姿勢とは何か？

姿勢とは何か？

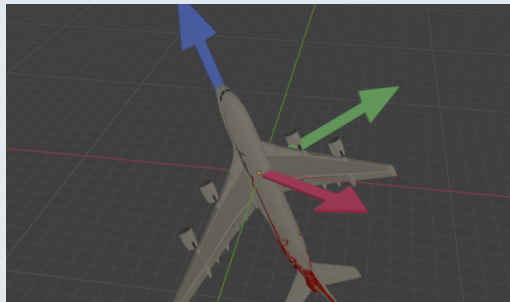
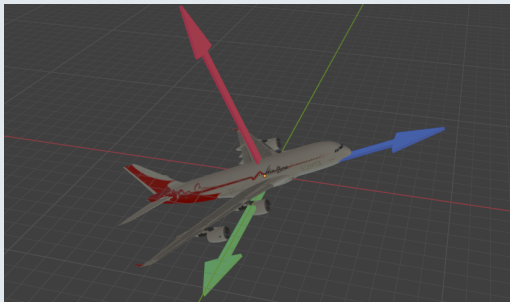
定義（姿勢）

物体の**姿勢**とは、物体が「向いている方向」と「その方向を軸とした回転」の2つを合わせた量を言う。



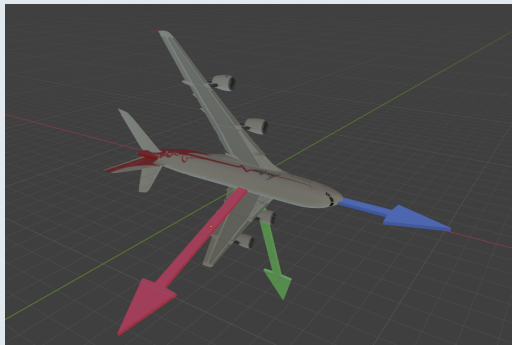
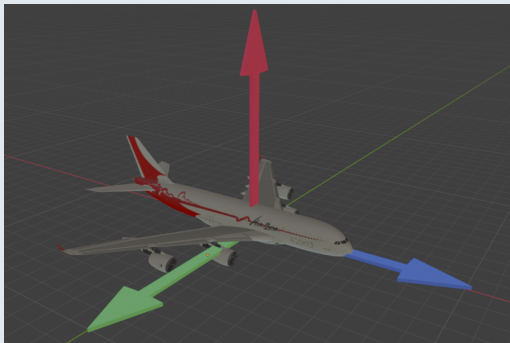
姿勢とは何か？ - 姿勢 = 3次元における回転

「向いている方向 + その方向に対する回転」



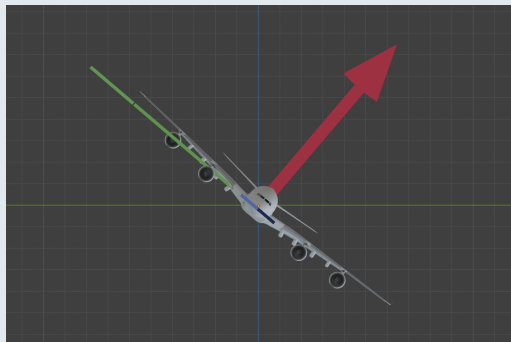
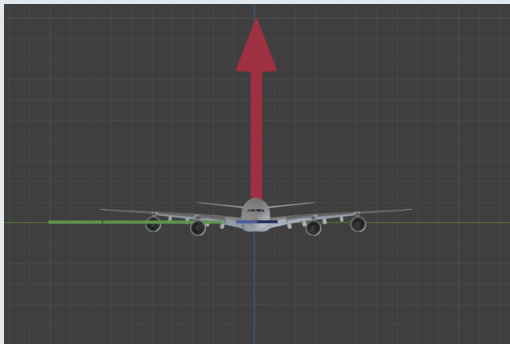
姿勢とは何か？ - 姿勢 = 3次元における回転

「向いている方向 + その方向に対する回転」



姿勢とは何か？ - 姿勢 = 3次元における回転

「向いている方向 + その方向に対する回転」

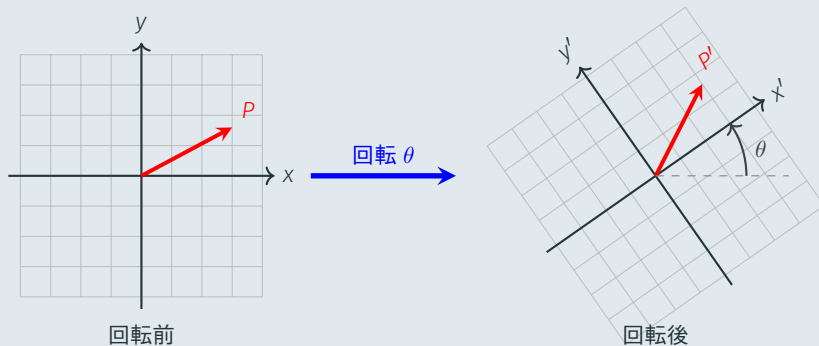


姿勢を表現する3つの方法

「物体の姿勢を数学的に記述するには？」

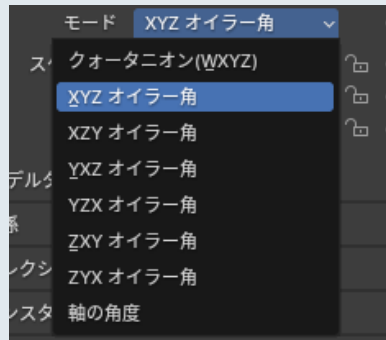
「物体の姿勢を数学的に記述するには？」

→ 例えば、2次元での回転ならば角度 θ を一つ指定してやれば良い。



「物体の姿勢を表現する方法は3つある！」

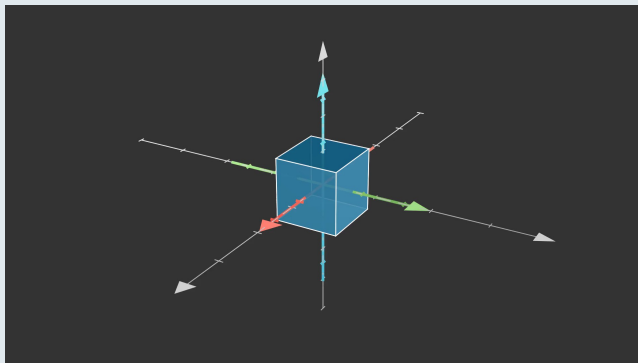
1. 角度を 3 つ指定する方法
(Euler 角)
2. 回転後の x-y-z 軸の向きを指定する方法
(回転行列)
3. 複素数の拡張を用いる方法
(四元数)



方法1：Euler 角

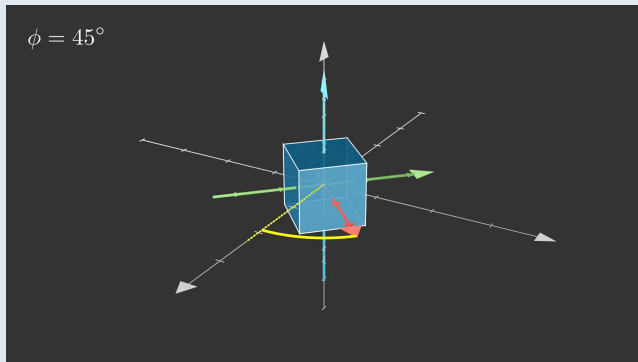
「3つの角度を指定して姿勢を表す」

こいつを回転させたい →



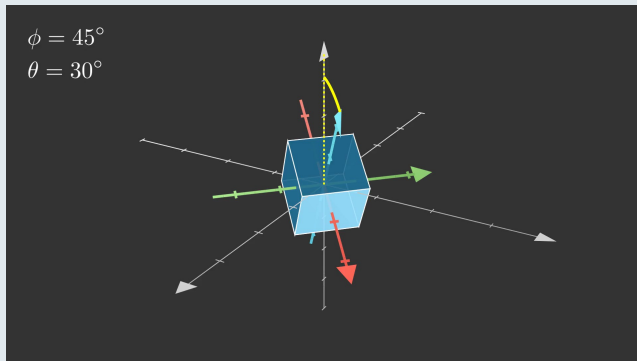
「3つの角度を指定して姿勢を表す」

青色のベクトルを軸にして回転 →



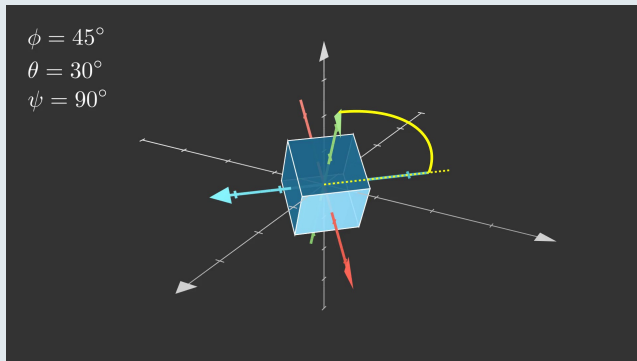
「3つの角度を指定して姿勢を表す」

緑色のベクトルを軸にして回転 →

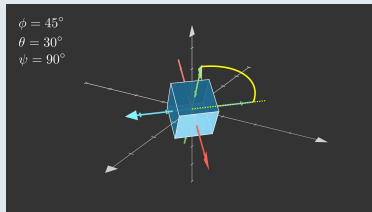
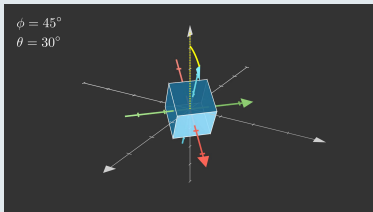
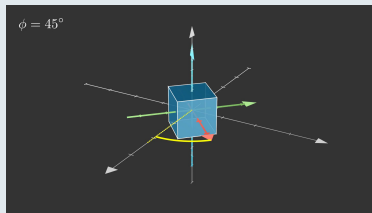
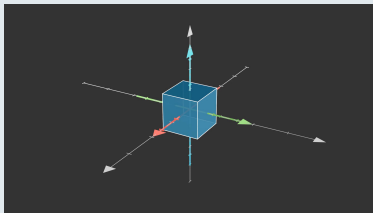


「3つの角度を指定して姿勢を表す」

赤色のベクトルを軸にして回転 →

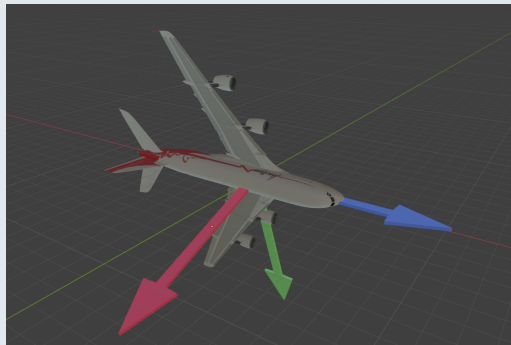
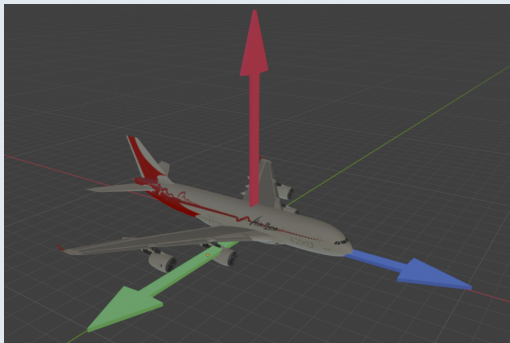


「Euler角 = 3つの角度で姿勢を表現」



方法 2 : 回轉行列

「赤、青、緑のベクトルの行き先を指定する」



姿勢を表現する3つの方法 - 方法2: 回転行列

$$\begin{array}{ccc} \text{緑の行き先} & \text{青の行き先} & \text{赤の行き先} \\ \mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} & \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} & \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

↓ 列ベクトルとして並べる¹

$$R = \left(\mathbf{g} \mid \mathbf{b} \mid \mathbf{r} \right) = \begin{pmatrix} g_1 & b_1 & r_1 \\ g_2 & b_2 & r_2 \\ g_3 & b_3 & r_3 \end{pmatrix}$$

¹緑、青、赤のベクトルの相対的な位置関係は、前ページのものを保つとする

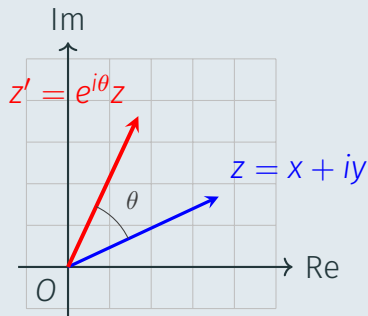
「赤、青、緑のベクトルの行き先を指定する」

行列の積の定義から、こうして作成した行列をそのまま掛ければ回転が表現できる

$$R = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{g} & \mathbf{b} & \mathbf{r} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} g_1 & b_1 & r_1 \\ g_2 & b_2 & r_2 \\ g_3 & b_3 & r_3 \end{pmatrix}$$

方法 3 : 四元数

「復習：2次元では複素数を用いて回転を記述できた」



- 2次元の点 (x, y) を複素数 $z = x + iy$ と見做す
- Euler の公式を用いれば回転が表現できる。
- $z' = e^{i\theta}z = z(\cos \theta + i \sin \theta)$

「四次元版複素数、**四元数**を用いればよい！」

- ・ 複素数の拡張として、**四元数**というものがある²
- ・ **虚数単位は 3 つ**あって、 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ を満たす
- ・ 複素数が実軸と虚軸による 2 次元の情報を持っていたのに対して、四元数は実軸と 3 つの虚軸による 4 次元の情報を持つ

²3 次元にこのような数体系があれば理想なのだが、実は存在しないことが知られている

「四次元版複素数、四元数を用いればよい！」

- ・ 複素数の拡張として、四元数というものがある²
- ・ 虚数単位は 3 つあって、 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ を満たす
- ・ 複素数が実軸と虚軸による 2 次元の情報を持っていたのに対して、四元数は実軸と 3 つの虚軸による 4 次元の情報を持つ
- ・ 虚数単位を i, j, k として、点 (x, y, z) を $xi + yj + zk$ に対応させる
- ・ ただし、複素数と比べてやや複雑...

²3 次元にこのような数体系があれば理想なのだが、実は存在しないことが知られている

姿勢を表現する 3 つの方法 - 方法 3 : 四元数

定理 (四元数による回転)

単位ベクトル (a, b, c) を軸として点 (x, y, z) を角度 θ 回転させた後の点は、

$$q(xi + yj + zk)\bar{q}$$

である。ただし、 $q = \cos \frac{\theta}{2} + (ai + bj + ck) \sin \frac{\theta}{2}$ とした。

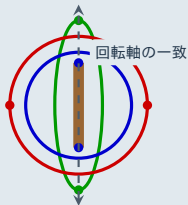
- ・ めっちゃ複雑だし、式の意味もよくわからないので、後で深堀ります！
- ・ まずは、本当に四元数を使う必要があるのかを考える
- ・ つまり、**四元数なしでは解決できない話題**に触れよう

Euler 角と行列表示の弱点

「Euler 角と回転行列にはそれぞれ弱点がある...」

Euler 角の弱点

ジンバルロック



回転行列の弱点

冗長性と制約

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

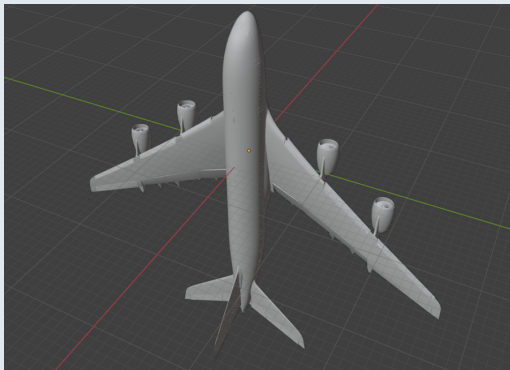
9 要素 (冗長)

直交性制約: $R^T R = I$

Euler 角と行列表示の弱点 - ジンバルロックとは何か

「特定の状況で、異なる Euler 角が同じ姿勢を表してしまう」

具体的には、2 つ目の角度が $\pm 90^\circ$ であるときに発生する。



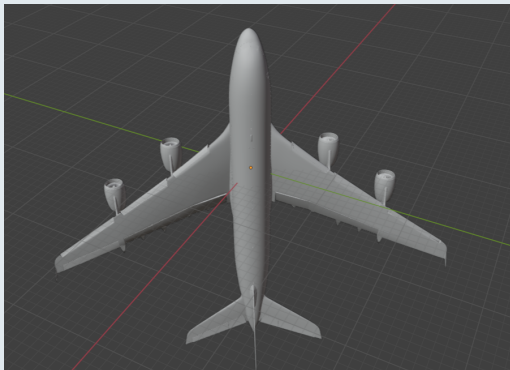
回転 X	0°		•
Y	-90°		•
Z	0°		•

回転 X	30°		•
Y	-90°		•
Z	-30°		•

Euler 角と行列表示の弱点 - ジンバルロックとは何か

「特定の状況で、異なる Euler 角が同じ姿勢を表してしまう」

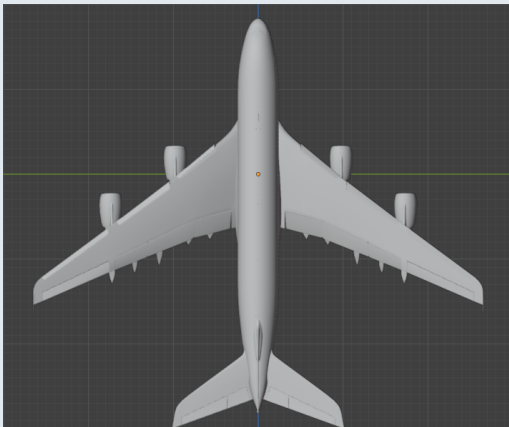
具体的には、2 つ目の角度が $\pm 90^\circ$ であるときに発生する。



回転 X	0°		•
Y	-90°		•
Z	30°		•

回転 X	-30°		•
Y	-90°		•
Z	60°		•

「自由度が失われることの何がまずい？」



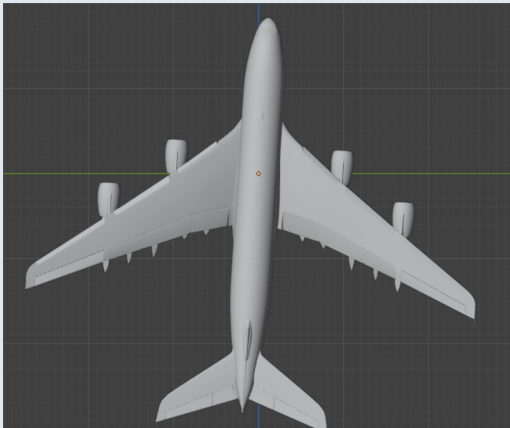
姿勢から Euler 角を一意に復元できない



無理やり復元すると微分不可能になる

回転 X	0°		•
Y	-90°		•
Z	0°		•

「自由度が失われることの何がまずい？」



姿勢から Euler 角を一意に復元できない



無理やり復元すると微分不可能になる

回転 X	-90°		•
Y	-93.828°		•
Z	90°		•

「ジンバルロックとは、写像の特異点である！」

${}^3SO(3)$: 3 次元空間における回転（姿勢）の全体集合

「ジンバルロックとは、写像の特異点である！」

- ・ 姿勢は角度の三つ組 (φ, θ, ψ) で表現できた
- ・ 姿勢から角度を与える操作 Φ は、 $SO(3)^3$ から角度の三つ組への写像である

$$\Phi : SO(3) \rightarrow (-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times (-\pi, \pi]$$

³ $SO(3)$: 3 次元空間における回転（姿勢）の全体集合

「ジンバルロックとは、写像の特異点である！」

- ・ 姿勢は角度の三つ組 (φ, θ, ψ) で表現できた
- ・ 姿勢から角度を与える操作 Φ は、 $SO(3)^3$ から角度の三つ組への写像である

$$\Phi : SO(3) \rightarrow (-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times (-\pi, \pi]$$

- ・ この写像の特異点がジンバルロックである！

³ $SO(3)$: 3 次元空間における回転（姿勢）の全体集合

Euler 角と行列表示の弱点 - ジンバルロックの数学的定式化

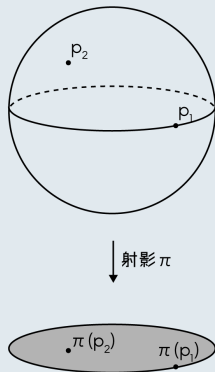
定義（特異点）

写像の微分（ヤコビ行列）のランクが低下し、像の局所的な自由度が下がる点を特異点という。

Euler 角から $SO(3)$ への写像 ϕ において：

- ・ 通常の姿勢では、ヤコビ行列のランクは 3（自由度 3）
- ・ $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ ではランクが 2 に落ちる（自由度 2）

→ このランク落ちを起こす数学的な特異点こそが、ジンバルロックである！



位相幾何学的な視点

なぜ特異点（ジンバルロック）を完全に無くせないのか？

- ・ 3つの角度が作るパラメータ空間と、姿勢の全体 $SO(3)$ は位相的に異なる構造を持つ
- ・ $SO(3)$ は複雑なひねりを持った空間（実射影空間 $\mathbb{R}P^3$ に同相）である
- ・ T^3 は3つの周期的な構造を持つが、姿勢 $SO(3)$ の周期はより複雑である
- ・ そのため、たった3つの変数からなる一つの座標系だけで、 $SO(3)$ 全体を滑らかに（特異点なく）覆い尽くすことは数学的に不可能である

「9つの成分を扱うのは冗長で面倒」

自由度と制約条件の不一致

3次元の回転は本質的に3つのパラメータ（自由度3）で決まる。

しかし、回転行列 $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ は9つの成分を持つ。

$$\underbrace{9 \text{ つのパラメータ}}_{\text{行列の全成分}} - \underbrace{6 \text{ つの制約式}}_{R^T R = I \text{ (直交条件)}} = \underbrace{\text{自由度 } 3}_{\text{本質的な回転の次元}}$$

- ・ 行列の積などの計算を繰り返すたびに、**数値誤差**が蓄積する。
- ・ 誤差によって6つの制約式（直交性）が破れるため、逐一正規直交化などの**補正**を行う必要がある。



2 | B

四元数とは何か？

計算の規則・非可換性・ロドリゲスの回転公式

四元数の計算規則

四元数の定義 - 四元数の計算規則

定義（四元数）

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ なる虚数単位 i, j, k と実数 x, y, z, w を用いて $x + yi + zj + wk$ と表される数を **四元数** という。

共役や大きさなどは複素数と同様に定義される

- ・ 共役 : $q = a + bi + cj + dk$ の共役は $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ である
- ・ 大きさ : $q = a + bi + cj + dk$ の大きさは $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ である

実部を v とし、虚部を $u = ai + bj + ck$ として、 $v + u$ と四元数を表現することがある。実部のことを **スカラー部** と呼び、虚部のことを **ベクトル部** と呼ぶ。

「四元数の積は非可換！」

実は、 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ のみから積の非可換性が導ける。

- $ij = ij \cdot (-k^2) = (-ijk)k = k$
- $ji = (-i) \cdot iji = -iki = -ikij(-j) = ik^2j = -ij = -k$

これより、 $ij \neq ji$ である。一般にも、四元数の積は非可換である。

四元数による回転の表現

四元数の定義 - 四元数による回転の表現

定理（四元数による回転）

単位ベクトル (a, b, c) を軸として点 (x, y, z) を角度 θ 回転させた後の点は、

$$q(xi + yj + zk)\bar{q}$$

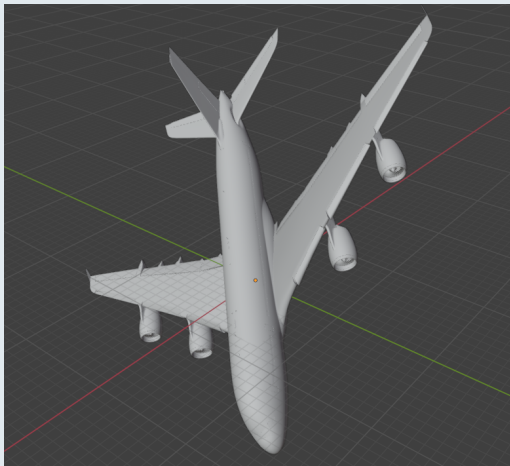
である。ただし、 $q = \cos \frac{\theta}{2} + (ai + bj + ck) \sin \frac{\theta}{2}$ とした。

例えば、 $(1, 1, 1)$ 方向を軸として 60° 回転するのに用いる四元数は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\cos 30^\circ + \sin 30^\circ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}i + \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k \right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i + \frac{1}{2\sqrt{3}}j + \frac{1}{2\sqrt{3}}k \\ &\simeq 0.866 + 0.289i + 0.289j + 0.289k\end{aligned}$$

四元数の定義 - 四元数による回転の表現

「unity や blender でも実際に、パラメータを入力できる！」



回転 W	0.866		•
X	0.289		•
Y	0.289		•
Z	0.289		•
モード	クォータニオン(W... ▼		

四元数の定義 - 四元数による回転の表現

1. ベクトルの分解

回転軸の単位ベクトルを $u = ai + bj + ck$ 、回転前の点を純虚四元数 $v = xi + yj + zk$ と見做す。 v を u に「平行な成分 $v_{\parallel}$ 」と「垂直な成分 $v_{\perp}$ 」に分解できる。

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp}$$

2. 四元数の積の性質（可換性と反可換性）

積の定義から、軸 u と各成分の間には以下の関係がある：

- ・ 平行成分： $uv_{\parallel} = v_{\parallel}u$
- ・ 垂直成分： $uv_{\perp} = -v_{\perp}u$

これより、 $q = \cos \frac{\theta}{2} + u \sin \frac{\theta}{2}$ とおくと、 $qv_{\parallel} = v_{\parallel}q$ および $qv_{\perp} = v_{\perp}\bar{q}$ が導かれる。

3. $qv\bar{q}$ の計算

分解した成分ごとに $q(\cdot)\bar{q}$ を計算する ($q\bar{q} = 1$ に注意)。

- ・ 平行成分 : $qv_{\parallel}\bar{q} = v_{\parallel}q\bar{q} = v_{\parallel}$ (不変)
- ・ 垂直成分 : $qv_{\perp}\bar{q} = q(qv_{\perp}) = q^2v_{\perp}$

ここで $q^2 = \cos \theta + u \sin \theta$ となるため、垂直成分は次のように変形できる :

$$q^2v_{\perp} = (\cos \theta + u \sin \theta)v_{\perp} = v_{\perp} \cos \theta + (uv_{\perp}) \sin \theta$$

4. ロドリゲスの回転公式との一致

純四元数の積の性質から、 $uv_{\perp} = -u \cdot v_{\perp} + u \times v_{\perp}$ であるが、垂直なので内積は 0 となり、外積 $u \times v_{\perp}$ に一致する。

$$\therefore qv\bar{q} = v_{\parallel} + v_{\perp} \cos \theta + (u \times v_{\perp}) \sin \theta$$

これは、軸 u の周りに角度 θ だけ回転させるベクトルの公式（ロドリゲスの回転公式）そのものである。

四元数の定義 - 四元数による回転の表現

参考. ロドリゲスの回転公式

3次元空間において、単位ベクトル u を軸としてベクトル v を角度 θ 回転させたベクトル v' は次式で表される：

$$v' = (u \cdot v)u + \cos \theta (v - (u \cdot v)u) + \sin \theta (u \times v)$$

ここで $v_{\parallel} = (u \cdot v)u$ 、および $v_{\perp} = v - (u \cdot v)u$ であるため、

$$v' = v_{\parallel} + v_{\perp} \cos \theta + (u \times v_{\perp}) \sin \theta$$

となり、四元数による計算結果 $qv\bar{q}$ と完全に一致する。

3 | B

被覆空間の理論

被覆空間のガロア理論・二重被覆としての四元数

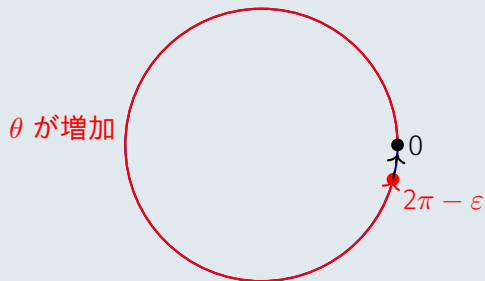
被覆空間の紹介

「すべての回転を安全に表現するために、空間を上から覆いたい」

- ・ 前述の通り、Euler 角にはジンバルロックがあり、特定の姿勢で計算が破綻してしまう弱点がある。
- ・ 3次元の回転を表現する空間 ($SO(3)$) は、実はねじれており、3つのパラメータだけでジンバルロックなしに表現することは不可能である。
- ・ そこで、元の複雑な回転空間を、よりシンプルで計算しやすい別の空間で「上からすっぽり覆ってしまおう」というのが被覆空間の発想である。

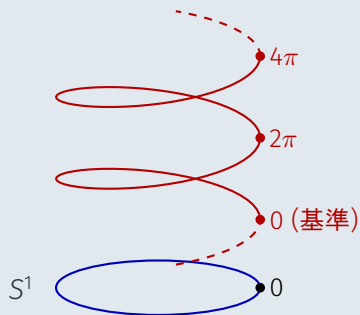
被覆空間の紹介 - 円周における不連続性 (1重被覆)

被覆空間のメリットを、単純な「円周 (2次元の回転)」で考えてみる。



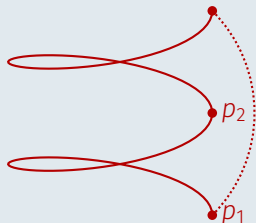
- ・ 角度 θ を使って円周上の点を表現するとする。
- ・ θ が $0 \rightarrow 2\pi$ へと1周する際、 $2\pi - \epsilon$ から少しでも増えようとする、値が突然 0 にリセットされる。
- ・ この値の不連続なジャンプが、コンピュータで計算を行う際の厄介な特異点となる。

被覆空間の紹介 - バネによる解消と「円周の限界」



- ・ 不連続性を回避するため、円を螺旋状の「バネ」に拡張した空間を考える。
- ・ 角度が 2π を超えてもバネの「2 階部分」へ進めば値のジャンプは起きない。
- ・ このバネを上下へ無限に長く続けると値のジャンプは起きない。

「ところが、3次元回転空間 $SO(3)$ の場合は事情が全く異なる！」



- ・ $SO(3)$ 自身に「2周すると幾何学的に元に戻る」という特殊なねじれがある。
- ・ そのため、バネを無限に長くしなくても、たった2周分（2重被覆）用意するだけで、その上端と下端が自然に繋がり（図の点線）、1つの閉じた空間になる。

被覆空間のガロア理論

被覆空間のガロア理論

対象とする空間が持つ被覆空間の種類は、その空間のねじれ具合を表す群（基本群）の**部分群**と1対1対応する。

- ・ 空間の「穴」や「ねじれ」の情報を、ループ（閉曲線）の集まりとして代数化したものを**基本群**と呼ぶ
- ・ この理論によれば、「どんな被覆空間が存在するか」という幾何学的な問題が、群の部分群の列挙という遥かに取り組みやすい問題に帰着できる
- ・ なお、Euler 角でジンバルロックが回避できないことも基本群から説明できる

被覆空間のガロア理論 - $SO(3)$ の持つ特殊なねじれ

では、我々が扱いたい3次元の回転空間 $SO(3)$ は、一体どのようなねじれ（基本群）を持っているのだろうか？

- ・ $SO(3)$ の中では、「1周（ 360° ）の回転」は元に戻せない（縮められない）が、「2周（ 720° ）の回転」は連続的に変形して「回転なし」に戻せるという奇妙な性質がある。
- ・ これは物理的にも「ディラックのベルトのトリック」や「お盆のトリック」として知られる現象である。
- ・ つまり、 $SO(3)$ のねじれ構造（基本群）は、2回操作すると元に戻る群、すなわち $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ という非常にシンプルな群で表現される。

なぜ四元数なのか？

なぜ四元数なのか？ - $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の部分群と空間の分類

ガロア理論によれば、 $SO(3)$ を覆うことができる空間は、群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の「部分群」をすべて列挙するだけで完全に分類できる。

群 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が持つ部分群は、以下の 2 つだけである。

1. 群全体 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

→ 1 重被覆。空間のねじれを全くほどこいていない、元の $SO(3)$ そのものである。

2. 自明な部分群 $\{0\}$

→ 2 重被覆。空間のねじれを完全にほどこき切った、性質の良い空間（普遍被覆空間）である。

普遍被覆空間の正体

分類から得られた唯一の普遍被覆空間こそが、3次元球面 S^3 である。

- ・ つまり、ジンバルロックのない滑らかに計算できる空間は本質的に S^3 のみ！
- ・ 一連の導出過程では、「滑らかに計算できる空間」を普遍被覆空間として定式化して、被覆空間のガロア理論を適用した

なぜ四元数なのか？ - 四元数

四元数の出現

S^3 に $SO(3)$ の回転と整合するように演算を定義すると、かならず四元数 $\mathbb{H}$ となる。

- ・ 実は、 $SO(3)$ の演算を S^3 に送る方法は一意的である（リフトの一意性）
- ・ こうして定めた演算がまさに四元数 $\mathbb{H}$ と完全に一致する
- ・ $SO(3)$ の一点に $\mathbb{H}$ の $q, -q$ の二点に対応するので、二重被覆である

なぜ四元数なのか？ - S^3 に演算を入れる方法（わかる人向け）

具体的な演算の構成

二重被覆なので基点の取り方、すなわちリフトの候補は 2 つあるが、どちらも同型であるので本質的に一意である。

$$\begin{array}{ccc} S^3 \times S^3 & \overset{\tilde{m}}{\underset{\text{リフト}}{\dashrightarrow}} & S^3 \\ \varpi \times \varpi \downarrow & & \downarrow \varpi \\ SO(3) \times SO(3) & \xrightarrow{m} & SO(3) \end{array}$$

こうして定めた演算 $\tilde{m}$ について、以下が確認できる

- ・ 群をなすこと
- ・ 被覆写像が $SO(3)$ との準同型を与えること
- ・ 群演算が滑らかであること

- ・ 佐藤隆夫：『基本群と被覆空間』，裳華房，2023 年 11 月．