

音律の線形性



Regular Temperamentの基本を知る

- 5度圏の真実とオイラー格子
- 音程を表すベクトル
- 音律の次元数「ランク」
- コンマの緩和
- フォッカーの周期ブロック

5 度圏の真実と オイラー格子

5度圏は無限に続く直線

12平均律の5度圏は似た音で切り止めて
無理やり丸めている

3¹²倍の音程を19オクターブ下げたら偶然元の音に近かった
(がしかし、23.46¢ほど高くなってしまう)

3倍 → 3倍 → 3倍 → 3倍

... 3¹²倍

ド - ソ - レ - ラ - ミ - シ - 7⁷# - ド# - ソ# - レ# - ラ# - ミ# - シ# - 7⁷X

半音の定義とは？

全音階的半音→短2度・5度圏5歩戻り（例：ミ～ファ）

半音階的半音→増1度・5度圏7歩進み（例：ファ～ファ#）

向きを逆にすれば♭が出現

ド - ソ - レ - ラ - ミ - シ - ファ# - ド# - ソ# - レ# - ラ# - ミ# - シ# - ファx



#の定義：「5度圏7歩分進む ∴ 増1度上がる」

「半音上げる」記号と勘違いされがちだが、これを5度圏で明確に定義

→半音とは？短2度・5度圏5歩戻り？増1度・5度圏7歩進み？〈曖昧〉

なお、♭はその逆、「5度圏7歩戻る ∴ 増1度下がる」

5度圏14歩進むのはダブルシャープになる

オイラー格子 ~ 3倍だけでは飽き足らず

右方向：3倍 上方向：5倍 2倍の方向は省略
5度圏と同じように、5倍音(長3度)の軸を増やした

つまり、純正律は無限に広がる座標空間

レ..	ラ..	ミ..	シ..	ファ#..	ド#..	ソ#..	レ#..	ラ#..	ミ#..	シ#..	ファx..	ドx..	ソx..	レx..	ラx..	ミx..
シb.	ファ.	ド.	ソ.	レ.	ラ.	ミ	シ.	ファ#.	ド#.	ソ#.	レ#.	ラ#.	ミ#.	シ#.	ファx.	ドx.
ソb	レb	ラb	ミb	シb	ファ	ソ	レ	ラ	ミ	シ	ファ#	ド#	ソ#	レ#	ラ#	
						5倍	3倍									
ミbb'	シbb'	ファb'	ドb'	ソb'	レb'	ラb'	ミb'	シb'	ファ'	ド'	ソ'	レ'	ラ'	ミ'	シ'	ファ#'
ドbb"	ソbb"	レbb"	ラbb"	ミbb"	シbb"	ファb"	ドb"	ソb"	レb"	ラb"	ミb"	シb"	ファ"	ド"	ソ"	レ"

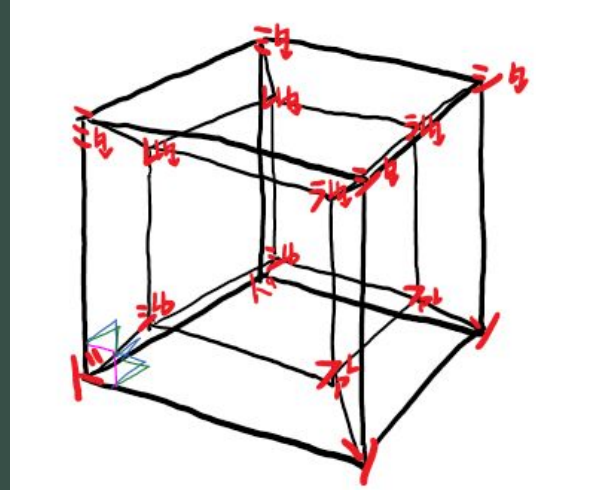
次元の増加

7倍音まで考えたら？

→オイラー格子の次元が増える

11倍音、13倍音

→次元がどんどん増えていく



新たな素数倍音を考えるとき、軸が増えて高次元化する

素数でない倍音は、倍音同士の掛け算なので
新たな軸は必要ない

ハリーパーチの「素数リミット」

日本語では「素数限界」と紹介されている記事もあり
何次の素数倍音まで風呂敷を広げて考えるか

3倍音まで考える→3limit

5倍音まで考える→5limit

7倍音まで考える→7limit

9倍音を考えるが5倍音、7倍音は考えない→3limit

練習問題

Q.

45倍音を考える必要がある。何limit？

練習問題

Q.

45倍音を考える必要がある。何limit？

A.

$$45=3^2 \times 5$$

5倍音まで考えているので 5limit

音程を表すベクトル

純正音程のベクトル モンゾ

Joseph Monzo氏にちなんでGene Ward Smith氏が命名
周波数比の構成素因数を成分にとる

ベクトルの表記にはブラ・ケット記法を転用する
※考える素数リミットまでの成分を書けばよい

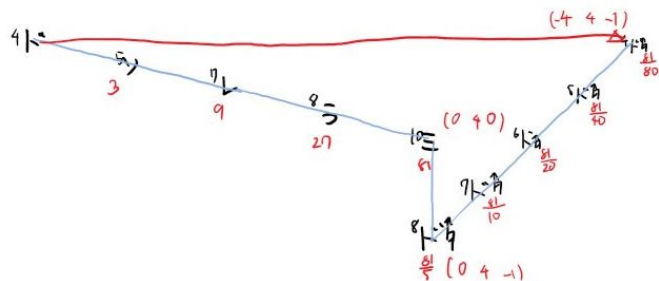
例

$$3/2 \rightarrow 2^{-1} \times 3^1 \rightarrow | -1 \ 1 \rangle$$

$$5/4 \rightarrow 2^{-2} \times 3^0 \times 5^1 \rightarrow | -2 \ 0 \ 1 \rangle$$

$$7/6 \rightarrow 2^{-1} \times 3^{-1} \times 5^0 \times 7^1 \rightarrow | -1 \ -1 \ 0 \ 1 \rangle$$

$$81/80 \rightarrow 2^{-4} \times 3^4 \times 5^{-1} \rightarrow | -4 \ 4 \ -1 \rangle$$



近似音程のベクトル ヴァル

各倍音がn平均律の何番目の音かを示す

例 12平均律

オクターブ→12ステップ

3倍音→19ステップ

5倍音→28ステップ

よってヴァルは $\langle 12 \ 19 \ 28 \mid$

ヴァルとモンゾの内積

純正音程が近似されるステップが計算できる

例 12平均律で $15/8$ (=長7度)の近似を調べたい

ヴァル $\langle 12 \ 19 \ 28 \mid$

モンゾ $15/8 \rightarrow 2^{-3} \times 3^1 \times 5^1 \rightarrow \mid -3 \ 1 \ 1 \rangle$

$$\begin{aligned} \langle 12 \ 19 \ 28 \mid -3 \ 1 \ 1 \rangle &= 12 \times (-3) + 19 \times 1 + 28 \times 1 \\ &= -36 + 19 + 28 = 11 \rightarrow \mathbf{11 \text{ ステップ}} \end{aligned}$$

練習問題

Q.

31平均律

3倍音:49ステップ 5倍音:72ステップ 7倍音:87ステップ

微小な音程 $225/224$ は何ステップに相当？

練習問題

Q.

31平均律

3倍音:49ステップ 5倍音:72ステップ 7倍音:87ステップ

微小な音程 $225/224$ は何ステップに相当？

A.

モンゾ $225/224 \rightarrow 2^{-5} \times 3^2 \times 5^2 \times 7^{-1} \rightarrow | -5 \ 2 \ 2 \ -1 \ >$

ヴァル $< 31 \ 49 \ 72 \ 87 \ |$

$< 31 \ 49 \ 72 \ 87 \ | \ -5 \ 2 \ 2 \ -1 \ > = -155+98+144-87 = 0$

音律の次元数「ランク」

ランク ~ 音律生成に必要な音程「Generator」の数

Generating Intervalとも

音階やn平均律(nEDO)、Temperamentを生成するのに必要な
積み重ねる音程

例えば12平均律は100¢一つあれば、それを積み重ねて
12平均律で出せるすべての音に到達可能
つまりRank 1 Temperament

ランク

Rank 1 Temperament

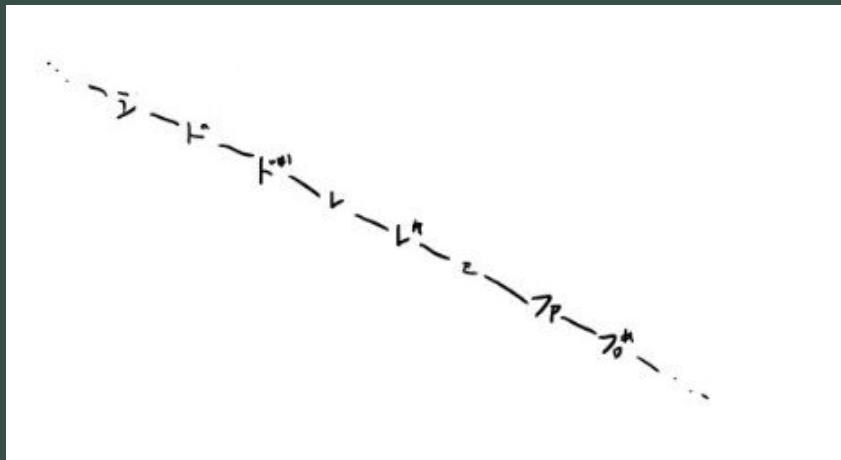
12平均律 100 ¢

ポーレンピアース 146.3 ¢

Carlos Alpha scale 77.97 ¢

31平均律 38.71 ¢

いずれもこの音程ひとつを積み重ねれば
音律のすべての音をとることができる



ランク

Rank 2 Temperament

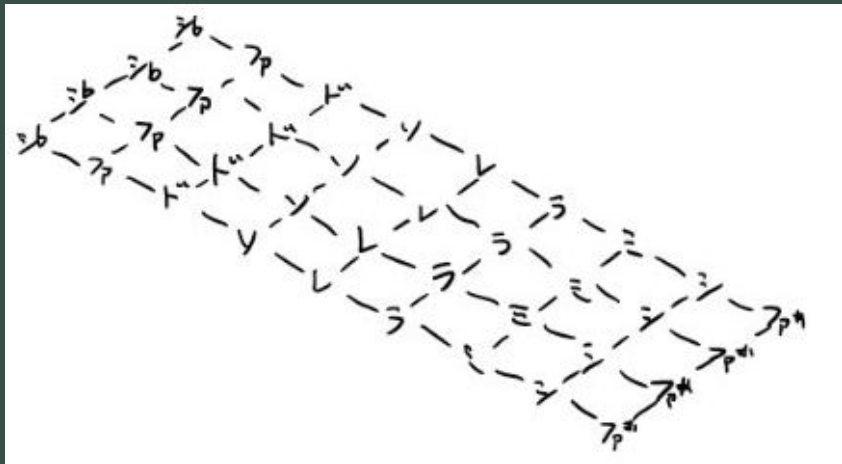
ピタゴラス音律 1200 ϕ , 1902 ϕ

1/4S. C. 中全音律 1200 ϕ , 696.6 ϕ

いずれもこれらの音程ふたつを組み合わせ積み重ねれば
音律のすべての音をとることができる

用意した音の数が十分でなく、正しい音程関係を使うことができない場合に、
音程的に近いもので無理に代用した際に音がひどくなる現象：**ウルフ**

また、それらのピッチの似た音同士の差：**コンマ**



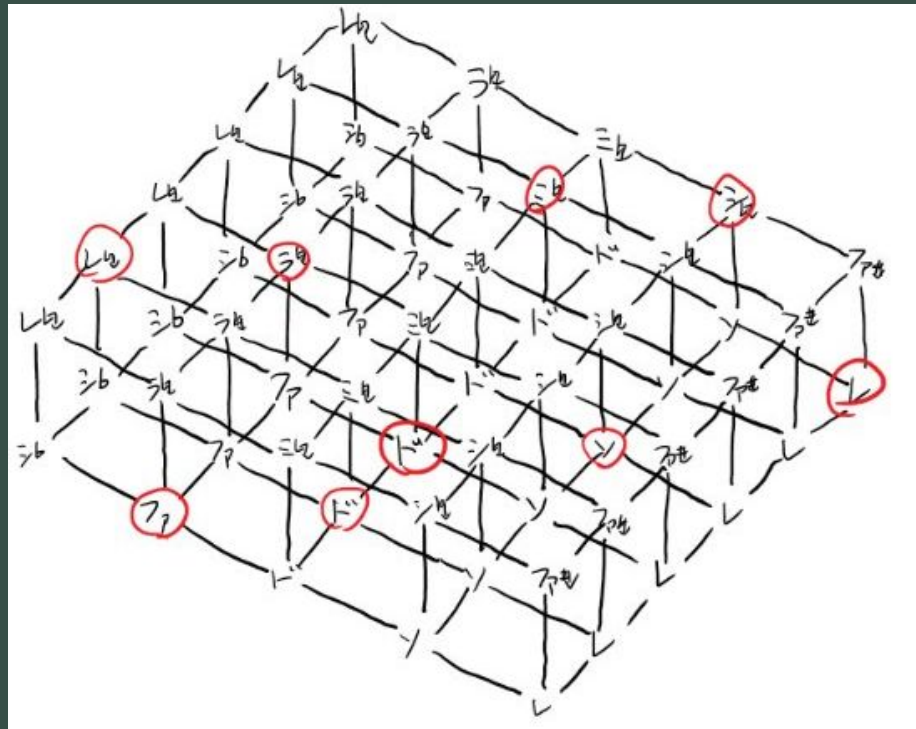
ランク

Rank 3 Temperament

プトレマイオスの
強烈なダイアトニック

1200 ¢, 1902 ¢, 2786 ¢

※巷でよく純正律と呼ばれるもの 厳密には「純正律の一種」



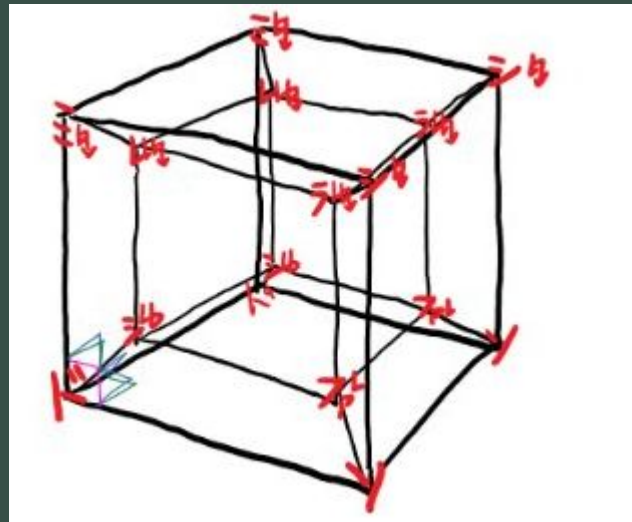
いずれもこれらの音程を組み合わせ積み重ねれば
音律のすべての音をとることができる

ランク

Rank 4 Temperament

7limitの純正律

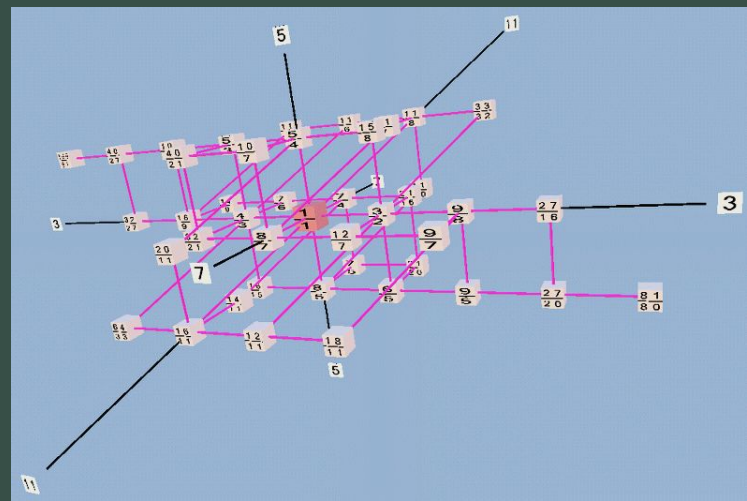
(なぜかVitalのTuningプリセットにあるが、12音縛りのせいでガタガタに)



Rank 5 Temperament

ハリー・パーチの43音音階

11limitで、オクターブあたり43個音を選択してある



コマの緩和

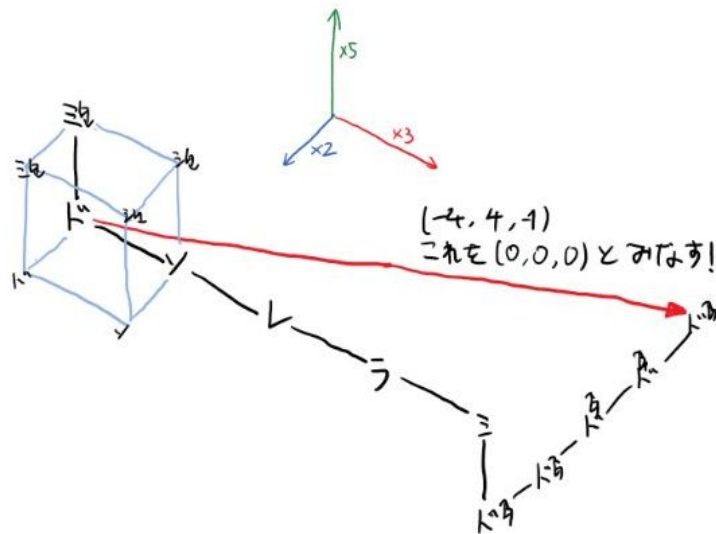
コンマの緩和

どこかの音程が微小な
純正音程を同じ音として見る

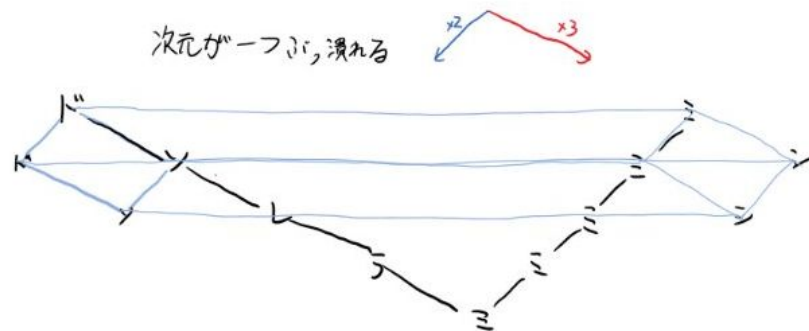
このように
音程の「見做し」をする事を
「緩和する」(Tempering out)という

結果として・・・
次元が下がる→ランクが一つ下がる

数学的には・・・
Rankを減らした「線形写像」と見てとれる



すると ↓



フォッカーの周期ブロック

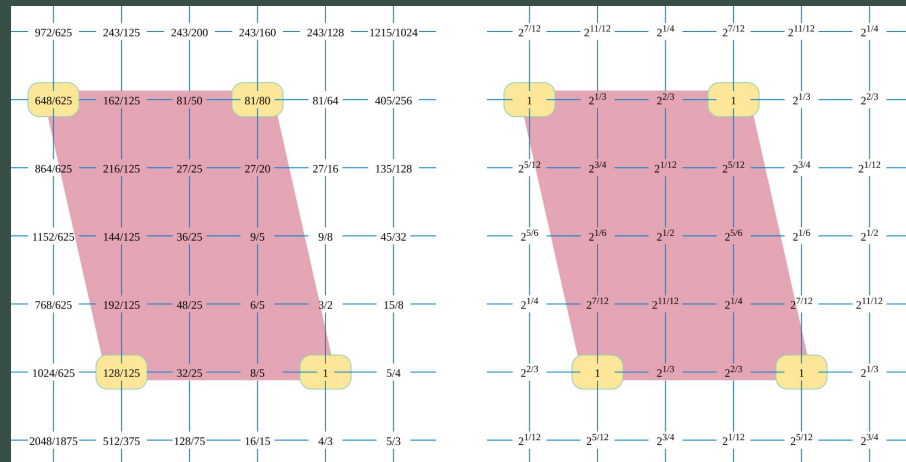
フォッカーの周期ブロック

オクターブは等価とみなし無視

同じ音程と見なしたい

モンゾベクトルを見つけて、

行列式を解き、その絶対値でオクターブの分割数が求まる



例

シントニックコンマ | -4 4 -1 >

ダイシス | -7 0 3 >

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 + 0 \times 1 = 12$$

練習問題

Q.

シントニックコンマ | -4 4 -1 0 >

セプティマルクレイスマ | -5 2 2 -1 >

ガメリスマ | -10 1 0 3 >

すべて緩和するのは何EDOか？

練習問題

Q.

シントニックコンマ | -4 4 -1 0 >

セプティマルクレイスマ | -5 2 2 -1 >

ガメリスマ | -10 1 0 3 >

すべて緩和するのは何EDOか？

A.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (24 + 1 + 0) - (0 - 6 + 0) = 31$$

したがって 31平均律

「サラスの方法」も参照

練習問題

Q.

3倍音を等価と見なすポーレンピアース音律では

センサマジック 245/243

ガリボー 3125/3087

の2つのコンマを等価と見なす。3倍音を何分割しているか。

A.

245/243 → | 0 -5 1 2 >

3125/3087 → | 0 -2 5 -3 >

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 10 = -13$$

したがって、絶対値を取って **13分割**

緩和するコンマのリスト

<https://en.xen.wiki/w/Comma>

Xenharmonic Wikiのコンマに関するページに一覧表がある

膨大な量のコンマが掲載されている

ごまかしたい部分を選び抜いて、フォッカーブロックにかけて
目的のEDOを探す方法もアリ！

まとめ

オイラー格子による考え方

5度圏は直線

純正律は無限に広がる空間

音程を表すベクトル

モンゾとヴァルがある

まとめ

オイラー格子による考え方

ランク：音律の実質的な次元数

ランク1：平均律など

ランク2：ピタゴラス・ミーントーン

ランク3：プトレマイオス

それ以上もある

まとめ

コンマの緩和

コンマを一つ見つけて同じ音とみなせばランクが下がる

フォッカーの周期ブロック

コンマを複数見つけて、行列式を求めるとその絶対値がそれをすべて緩和できる音律のオクターブの分割数になる

ありがとうございました。

画像引用一覧

<http://www.tonalsoft.com/monzo/partch/scale/partch43-lattice.aspx>

https://en.wikipedia.org/wiki/Fokker_periodicity_block