

微分音の入門的な数学

...

基本的な計算ができるようになるために

- 周波数と音程の変換
- レギュラーテンペラメント(正則音律)
- モンゾ・ヴァル
- ランク
- マッピング行列
- 緩和
- フォッカー周期ブロック

周波数と音程の変換

周波数比

周波数比は音程に対して指数関数的に対応

セント	半音	オクターブ	周波数比
1200	12	1	2
2400	24	2	4
3600	36	3	8
$1200n$	$12n$	n	2^n

周波数比

音程は周波数比に対して対数関数的に対応

周波数比	セント	半音	オクターブ
2	1200	12	1
4	2400	24	2
8	3600	36	3
3	1901.95500087...	19.0195500087...	1.58496250072...
n	$1200 \log_2 (n)$	$12 \log_2 (n)$	$\log_2 (n)$

指数・対数・冪根

$$2^3 = 8$$

周波数比2倍(オクターブ)が3個で
周波数比8倍になる

$$\log_2 8 = 3$$

周波数比8倍をオクターブ(2倍)という
音程の中で見ると、3オクターブになる

$$\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$$

周波数比8倍を音程的に3等分すると
周波数比2倍(オクターブ)になる

大事な数字 5選

対数の性質から、周波数比と音程の変換を暗算で

倍音を1オクターブ内に転回還元
覚えやすいよう3桁のφにする

素数倍音のみを5個覚えればいい

3→702：みんな鬼

5→386：ごみやろう

7→969：泣く無給

11→551：いい551(蓬萊)

13→841：瞳はよい

$$1200\log_2\left(\frac{3}{2}\right) \approx 701.955$$

$$1200\log_2\left(\frac{5}{4}\right) \approx 386.314$$

$$1200\log_2\left(\frac{7}{4}\right) \approx 968.826$$

$$1200\log_2\left(\frac{11}{8}\right) \approx 551.318$$

$$1200\log_2\left(\frac{13}{8}\right) \approx 840.528$$

大事な数字 5選

試しに純正な長7度(8 : 15)を計算してみる
大体11半音くらいになるはず

$$1200\log_2\left(\frac{3}{2}\right) \approx 701.955$$

$$1200\log_2\left(\frac{5}{4}\right) \approx 386.314$$

$$1200\log_2\left(\frac{15}{8}\right) = 1200\left\{\log_2\left(\frac{5}{4} \times \frac{3}{2}\right)\right\}$$

$$= 1200\log_2\left(\frac{5}{4}\right) + 1200\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\approx 386.314 + 701.955 = 1088.269$$

レギュラーテンペラメント
(正則音律)

正則音律

5度圏のように特定の音程の繰り返しによって得られる音律

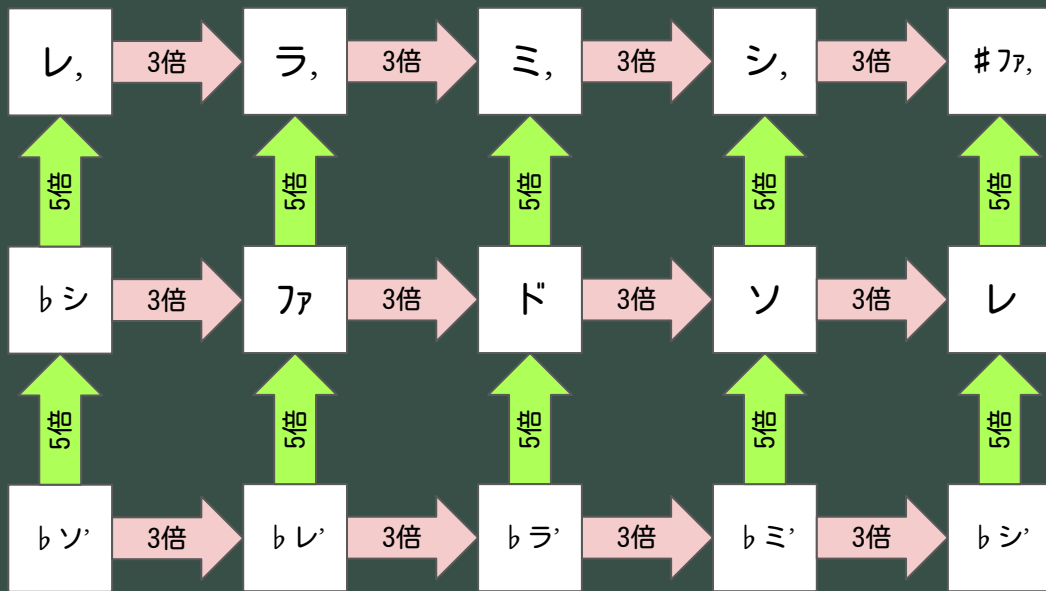
生成元(Generator)

5度圏の完全5度のように、
音律生成のもとになる音程

生成元は何個あってもよい

右図は生成元を「5倍音」と「3倍音」とした
純正律である(無限に続けられる)
オクターブ転回をすることを踏まえて「2倍音」
を追加し、3次元の音律空間となる。

同じ音はひとつとしてない。



オイラー格子 ～ 3倍だけでは飽き足らず

右方向：3倍 上方向：5倍 2倍の方向は省略

5度圏と同じように、5倍音(長3度)の軸を増やした

つまり、純正律は無限に広がる座標空間

レ..	ラ..	ミ..	シ..	ﾌｱ#..	ﾄ#..	ソ#..	レ#..	ﾗ#..	ﾐ#..	ｼ#..	ﾌｱx..	ﾄx..	ソx..	ﾚx..	ﾗx..	ﾐx..
ｼb.	ﾌｱ.	ﾄ.	ソ.	ﾚ.	ﾗ.	ミ	ｼ.	ﾌｱ#.	ﾄ#.	ソ#.	ﾚ#.	ﾗ#.	ﾐ#.	ｼ#.	ﾌｱx.	ﾄx.
ソb	ﾚb	ﾗb	ﾐb	ｼb	ﾌｱ		ソ	ﾚ	ﾗ	ﾐ	ｼ	ﾌｱ#	ﾄ#	ソ#	ﾚ#	ﾗ#
ﾐbb'	ｼbb'	ﾌｱb'	ﾄb'	ソb'	ﾚb'	ﾗb'	ﾐb'	ｼb'	ﾌｱ'	ﾄ'	ソ'	ﾚ'	ﾗ'	ﾐ'	ｼ'	ﾌｱ#'
ﾄbb"	ソbb"	ﾚbb"	ﾗbb"	ﾐbb"	ｼbb"	ﾌｱb"	ﾄb"	ソb"	ﾚb"	ﾗb"	ﾐb"	ｼb"	ﾌｱ"	ﾄ"	ソ"	ﾚ"

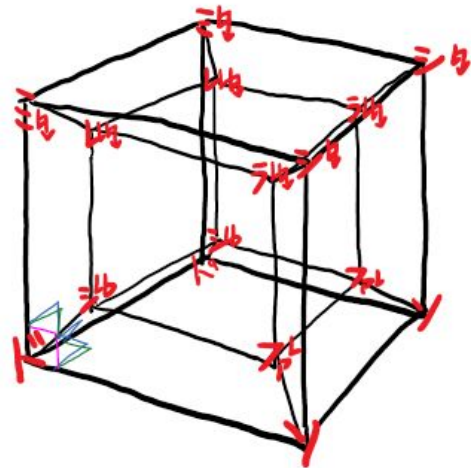
次元の増加

7倍音まで考えたら？

→オイラー格子の次元が増える

11倍音、13倍音

→次元がどんどん増えていく



新たな素数倍音を考えるとき、軸が増えて高次元化する

素数でない倍音は、
倍音同士の掛け算なので、新たな軸は必要ない

ハリーパーチの「素数リミット」

日本語では「素数限界」と紹介されている記事もあり
何次の素数倍音まで風呂敷を広げて考えるか

3倍音まで考える→3limit

5倍音まで考える→5limit

7倍音まで考える→7limit

9倍音を考えるが5倍音、7倍音は考えない→3limit

モンゾ・ヴァル

純正音程のベクトル モンゾ

Joseph Monzo氏にちなんでGene Ward Smith氏が命名

周波数比の構成素因数を成分にとる

ベクトルの表記にはブラ・ケット記法を転用する

※考える素数リミットまでの成分を書けばよい

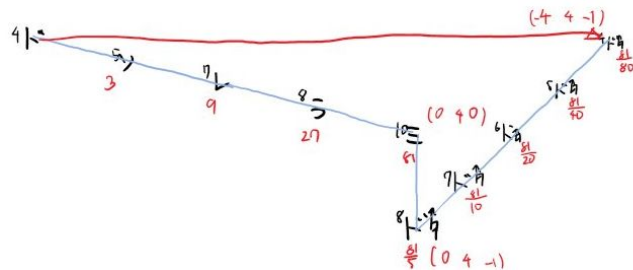
例

$$3/2 \rightarrow 2^{-1} \times 3^1 \rightarrow | -1 \ 1 \rangle$$

$$5/4 \rightarrow 2^{-2} \times 3^0 \times 5^1 \rightarrow | -2 \ 0 \ 1 \rangle$$

$$7/6 \rightarrow 2^{-1} \times 3^{-1} \times 5^0 \times 7^1 \rightarrow | -1 \ -1 \ 0 \ 1 \rangle$$

$$81/80 \rightarrow 2^{-4} \times 3^4 \times 5^{-1} \rightarrow | -4 \ 4 \ -1 \rangle$$



近似音程のベクトル ヴァル

各倍音がn平均律の何番目の音かを示す

例 12平均律

オクターブ→12ステップ

3倍音→19ステップ

5倍音→28ステップ

よってヴァルは < 12 19 28 |

ヴァルとモンゾの内積

純正音程が近似されるステップが計算できる

例 12平均律で $15/8$ (=長7度)の近似を調べたい

ヴァル $\langle 12 \ 19 \ 28 \mid$

モンゾ $15/8 \rightarrow 2^{-3} \times 3^1 \times 5^1 \rightarrow \mid -3 \ 1 \ 1 \rangle$

$$\begin{aligned} \langle 12 \ 19 \ 28 \mid -3 \ 1 \ 1 \rangle &= 12 \times (-3) + 19 \times 1 + 28 \times 1 \\ &= -36 + 19 + 28 = 11 \rightarrow \text{11ステップ} \end{aligned}$$

ヴァルとモンゾの内積

純正音程が近似されるステップが計算できる

例 12平均律で $15/8$ (=長7度)の近似を調べたい

ヴァル $\langle 12 \ 19 \ 28 \mid$

モンゾ $15/8 \rightarrow 2^{-3} \times 3^1 \times 5^1 \rightarrow \mid -3 \ 1 \ 1 \rangle$

$$\begin{aligned} \langle 12 \ 19 \ 28 \mid -3 \ 1 \ 1 \rangle &= 12 \times (-3) + 19 \times 1 + 28 \times 1 \\ &= -36 + 19 + 28 = 11 \rightarrow \text{11ステップ} \end{aligned}$$

ヴァルの条件

普通は倍音に近似する数字を取る必要がある

$$\langle a \quad b \quad c \quad d \quad \dots |$$

$$\Rightarrow a, b, c, d, \dots$$

$$\approx n \log 2, n \log 3, n \log 5, n \log 7 \dots$$

ランク

ランク 音律生成に最低限必要な「生成元」の数

Generating Intervalとも

音階やn平均律(nEDO)、Temperamentを生成するのに必要な
積み重ねる音程

例えば12平均律は100¢一つあれば、それを積み重ねて
12平均律で出せるすべての音に到達可能
つまりRank 1 Temperament

ランク

Rank 1 Temperament

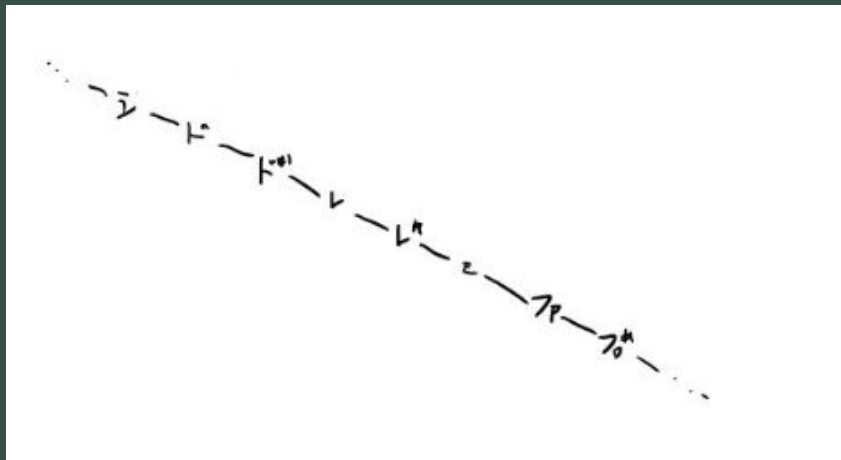
12平均律 100 ¢

ボーレンピアース 146.3 ¢

Carlos Alpha scale 77.97 ¢

31平均律 38.71 ¢

いずれもこの音程ひとつを積み重ねれば
音律のすべての音をとることができる



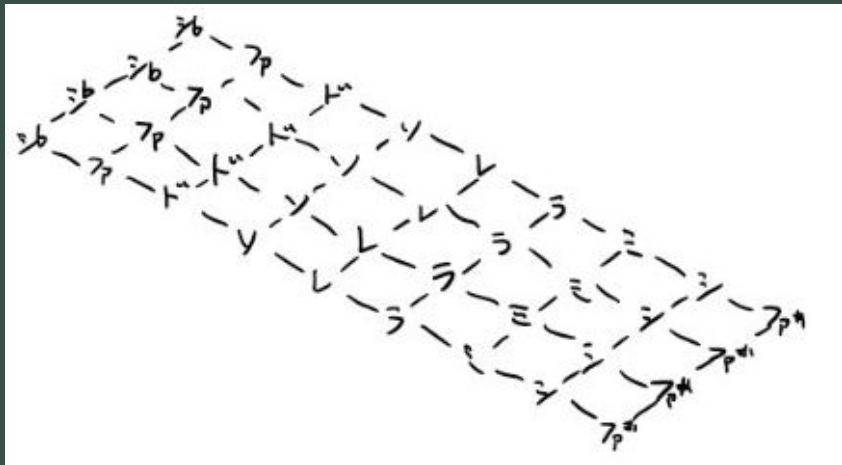
ランク

Rank 2 Temperament

ピタゴラス音律 1200 ϕ , 1902 ϕ

1/4S. C. 中全音律 1200 ϕ , 696.6 ϕ

いずれもこれらの音程ふたつを組み合わせ積み重ねれば
音律のすべての音をとることができる



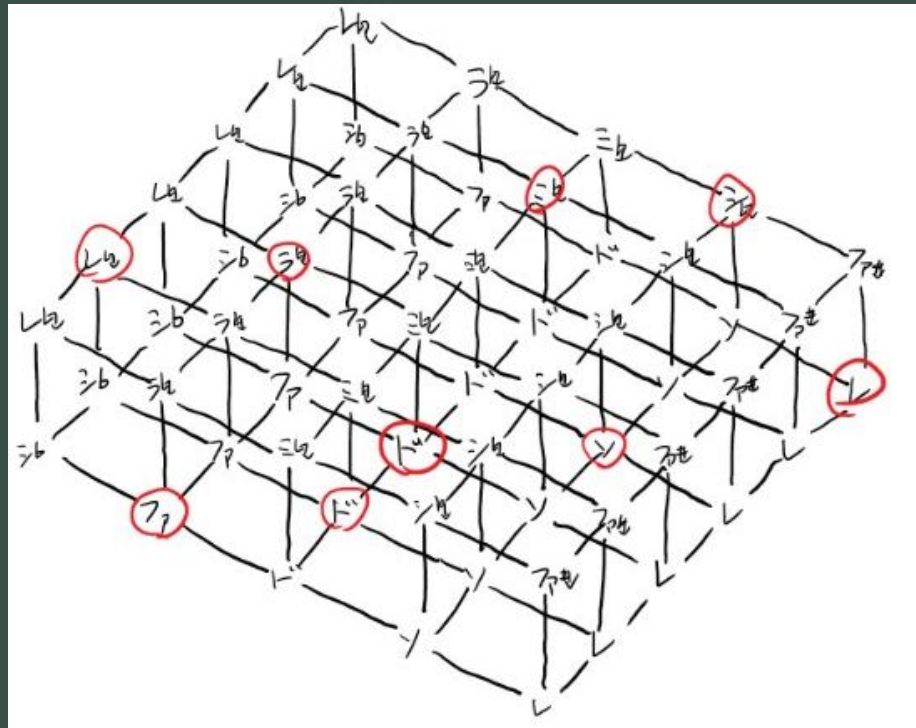
ランク

Rank 3 Temperament

プトレマイオスの
強烈なダイアトニック

1200 ¢, 1902 ¢, 2786 ¢

※巷でよく純正律と呼ばれるもの 厳密には「純正律の一種」



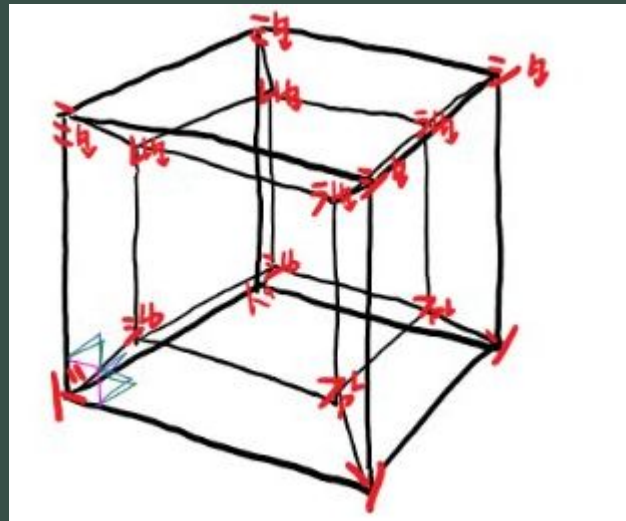
いずれもこれらの音程を組み合わせ積み重ねれば
音律のすべての音をとることができる

ランク

Rank 4 Temperament

7-limitの純正律

(なぜかVitalのTuningプリセットにあるが、12音縛りのせいでガタガタに)



Rank 5 Temperament

11-limitの純正律

正則音律の“ランク”とは、「生成元」(Generator)と呼ばれる独立した音程の数
これらを組み合わせることで、その音律の任意の音程を得ることができる。

群論 → 正則音律の音程は、**生成元数に等しい(共)階数**を持つ有限生成自由アーベル群を構成する
線形代数 → 音律のランクは、音律を定義する**任意の写像行列の(共)階数**

マッピング行列

マッピング行列

各純正音程が、各生成元何個分に相当するかを定義する行列

ヴァルとは **ランク 1 音律の写像行列** と見なせる

12平均律

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 2 \\ \text{音程} \\ 12 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \\ \text{音程} \\ 19 \end{array} & \begin{array}{c} 5 \\ \text{音程} \\ 28 \end{array} \\ \langle 12 & 19 & 28 \end{array} \Bigg| \text{半音の数}$$

中全音律

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 2 \\ \text{音程} \\ 12 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \\ \text{音程} \\ 19 \end{array} & \begin{array}{c} 5 \\ \text{音程} \\ 28 \end{array} \\ \langle 1 & 1 & 0 \end{array} \Bigg| \text{オクターブの数} \\ \langle 0 & 1 & 4 \end{array} \Bigg| \text{完全5度の数}$$

マッピング行列

例：周波数比15/8→ $|-3 \ 1 \ 1\rangle$ のマッピングを計算

12平均律

$$\begin{pmatrix} 12 & 19 & 28 \end{pmatrix}_{\text{ヴァル}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{モンゾ}} = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}_{\text{半音}}$$

中全音律

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{\text{マッピング}} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{モンゾ}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{オクターブ} \\ \text{完全5度} \end{matrix}$$

正則音律(マニア向け)

純正音程のアーベル群(有理数比の音程など)から、調整された音程のアーベル群への準同型写像。

具体的には：

純正音程は、 $3/2$ (完全五度)、 $5/4$ (長三度)などの有理数で表される。

それらの比の集合(乗法群)を写す先の音程群では、一部の微小な差異(コンマ)をユニゾン($1/1$)に緩和する。

この写像が積($\equiv$ 比)に関する準同型であることがポイント。

正則音律(マニア向け)

中全音律の例：

6/5（純正短3度）と32/27（ピタゴラス的短3度）は、違う音程ではあるが、
 $M(6/5) = M(32/27)$ とすることで、「どちらも“短3度”として扱う」ようになる。

このとき、81/80（シントニック・コンマ）の差は
M写像でユニゾンに写される $\rightarrow M(81/80) = M(1/1)$

緩和

コンマの緩和

どこかの音程が微小な
純正音程を同じ音として見る

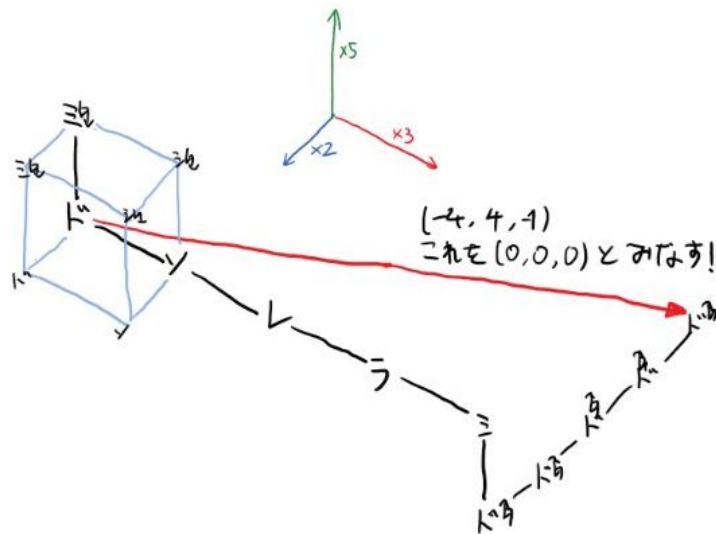
このように
音程の「見做し」をする事を
「**緩和**する」(Tempering out)という

結果として・・・

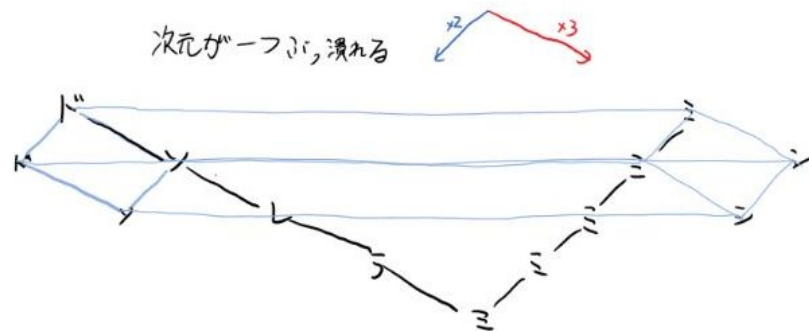
次元が下がる→**ランクが一つ下がる**

数学的には・・・

Rankを減らした「線形写像」と見てとれる



すると ↓



コンマの緩和(数学的説明)

マッピング行列と微小な音程(コンマ)のモンゾの積がゼロ行列になるとき
コンマが緩和されている。

12平均律

$$\begin{pmatrix} 12 & 19 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

中全音律

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

マッピング

モンゾ

=

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ オクターブ

完全5度

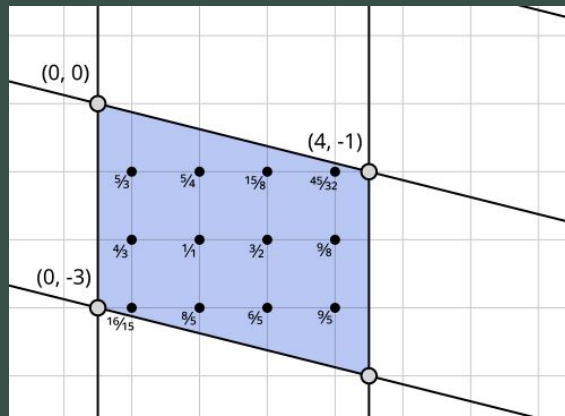
フォッカーの周期ブロック

オクターブは等価とみなし無視

同じ音程と見なしたい

モンゾベクトルを見つけて、

行列式を解くと、オクターブの分割数が求まる



例

シントニックコンマ | -4 4 -1 >

ダイシス | 7 0 -3 >

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 12$$

モンゾのベクトルが張る平行四辺形・平行六面体・さらに高次元の類似体の面積・体積として見なすことが出来る。

ありがとうございました。

画像引用一覧

https://en.xen.wiki/w/File:Fokker_block_duodene.png