ヴァルとマッピング行列

•••

音律論の、本当の意味で“次元が高すぎる”話

- レギュラーテンペラメント（正則音律）
- モンゾ
- Patentヴァル
- ランク
- 行列の積の計算
- マッピング行列
- 緩和
- マッピング行列の算出
- カーネル
- マッピング同士の積
- コンマを緩和する音律の判定
- 実践

レギュラーテンペラメント
（正則音律）

正則音律

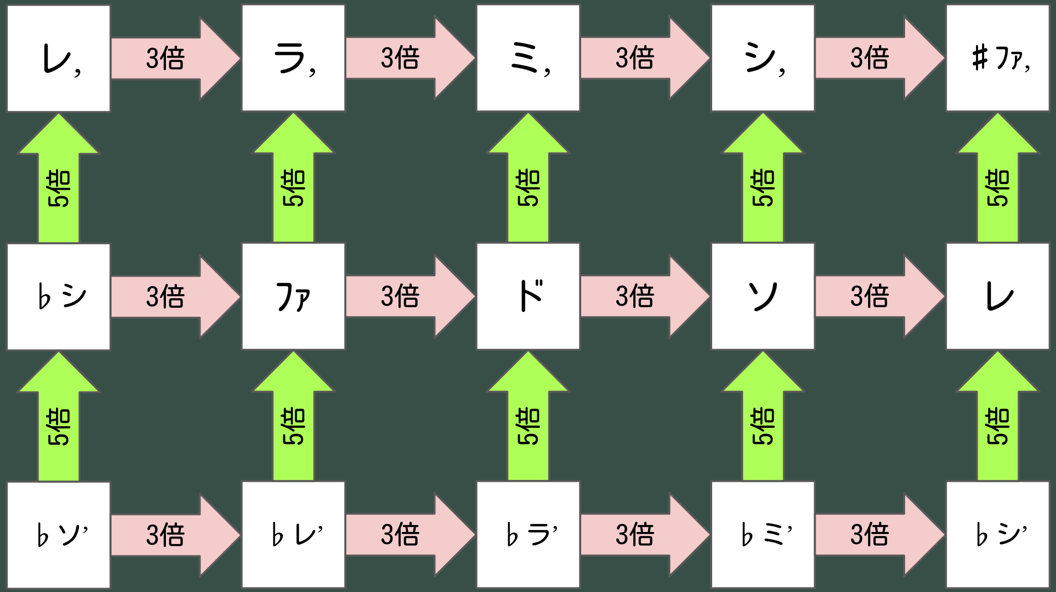
5度圏のように特定の音程の繰り返しによって得られる音律

生成元(Generator)
5度圏の完全5度のように、
音律生成のもとになる音程

生成元は何個あってもよい

右図は生成元を「5倍音」と「3倍音」とした
純正律である(無限に続けられる)
オクターブ転回をすることを踏まえて「2倍音」
を追加し、3次元の音律空間となる。

同じ音はひとつとしてない。



オイラー格子 ～ ３倍だけでは飽き足らず

右方向：３倍　上方向：５倍　２倍の方向は省略
５度圏と同じように、５倍音(長３度)の軸を増やした

つまり、純正律は無限に広がる座標空間

レ..	ラ..	ミ..	シ..	ファ#..	ド#..	ソ#..	レ#..	ラ#..	ミ#..	シ#..	ファx..	ドx..	ソx..	レx..	ラx..	ミx..
シb.	ファ.	ド.	ソ.	レ.	ラ.	ミ.	シ.	ファ#.	ド#.	ソ#.	レ#.	ラ#.	ミ#.	シ#.	ファx.	ドx.
ソb	レb	ラb	ミb	シb	ファ	[illegible]	ソ	レ	ラ	ミ	シ	ファ#	ド#	ソ#	レ#	ラ#
ミbb'	シbb'	ファb'	ドb'	ソb'	レb'	ラb'	ミb'	シb'	ファ'	ド'	ソ'	レ'	ラ'	ミ'	シ'	ファ#'
ドbb''	ソbb''	レbb''	ラbb''	ミbb''	シbb''	ファb''	ドb''	ソb''	レb''	ラb''	ミb''	シb''	ファ''	ド''	ソ''	レ''

5倍

3倍

モンゾ

純正(有理)音程のベクトル モンゾ

Joseph Monzo氏にちなんでGene Ward Smith氏が命名

周波数比の構成素因数を成分にとる

ベクトルの表記にはブラ・ケット記法を転用する

※考える素数リミットまでの成分を書けばよい

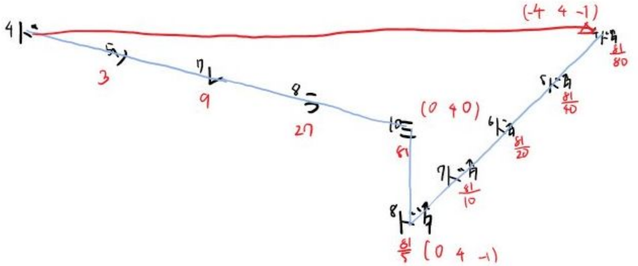
例

$$\frac{3}{2} = 2^{-1} \times 3^{1} \Rightarrow \left|-1 \quad 1\right\rangle$$

$$\frac{5}{4} = 2^{-2} \times 3^{0} \times 5^{1} \Rightarrow \left|-2 \quad 0 \quad 1\right\rangle$$

$$\frac{7}{6} = 2^{-1} \times 3^{-1} \times 5^{0} \times 7^{1} \Rightarrow \left|-1 \quad -1 \quad 0 \quad 1\right\rangle$$

$$\frac{81}{80} = 2^{-4} \times 3^{4} \times 5^{-1} \Rightarrow \left|-4 \quad 4 \quad -1\right\rangle$$



モンゾの意味と列ベクトル

モンゾは列ベクトルの扱い

$$\begin{array}{rc} & \text{音程①} \\ \begin{matrix}\text{2倍音の個数} \\ \text{3倍音の個数} \\ \text{5倍音の個数}\end{matrix} & \begin{pmatrix}-4 \\ 4 \\ -1\end{pmatrix}\end{array}$$

Patentヴァル

Patentヴァル

倍音に近似する数字から得たヴァル

$$\langle a \quad b \quad c \quad d \quad \cdots |$$

$$\Rightarrow a, b, c, d, \cdots$$

$$\approx n \log 2, n \log 3, n \log 5, n \log 7 \cdots$$

Patentヴァル

各倍音がn平均律の何番目の音かを示す値。

例　12平均律
オクターブ→12半音（ド～ド↑）
3倍音→19半音に近似（ド～ソ↑）
5倍音→28半音に近似（ド～ミ↑↑）
よってPatentヴァルは　$\langle 12 \quad 19 \quad 28 |$

ランク

ランク　音律生成に最低限必要な「生成元」の数

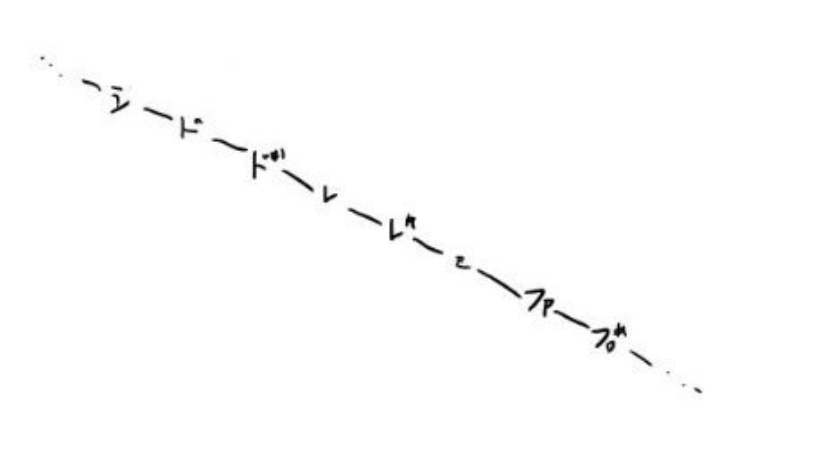
Generating Intervalとも
音階やn平均律(nEDO)、Temperamentを生成するのに必要な
積み重ねる音程

例えば12平均律は100¢一つあれば、それを積み重ねて
12平均律で出せるすべての音に到達可能
つまりRank 1 Temperament

ランク

Rank 1 Temperament

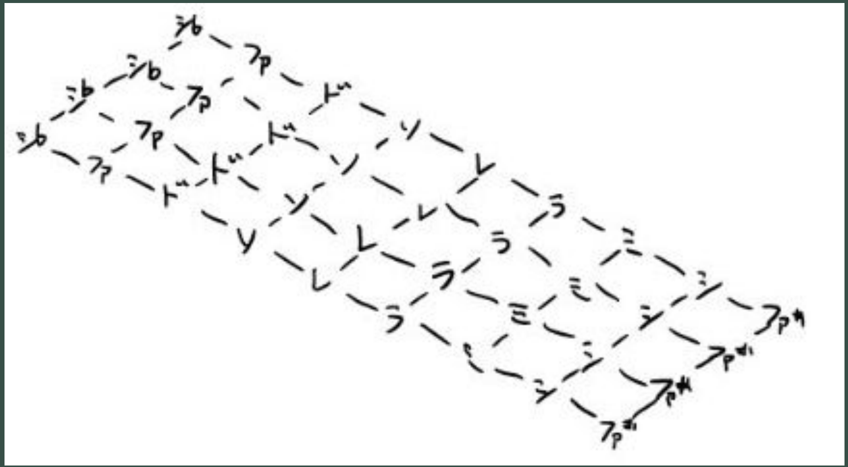
12平均律　100¢
ボーレンピアース　146.3¢
Carlos Alpha scale　77.97¢
31平均律　38.71¢



いずれもこの音程ひとつを積み重ねれば
音律のすべての音をとることができる

ランク

Rank 2 Temperament



ピタゴラス音律　1200¢, 1902¢

1/4S.C.中全音律　1200¢,　696.6¢

いずれもこれらの音程ふたつを組み合わせ積み重ねれば
音律のすべての音をとることができる

正則音律の“ランク”とは、「生成元」(Generator)と呼ばれる独立した音程の数
これらを組み合わせることで、その音律の任意の音程を得ることができる。

音律のランクは、音律を定義する任意の写像行列の(共)階数

行列の積の計算

行列の積の計算方法

横と縦同士で掛け算して足し算

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

マッピング行列

マッピング（写像）行列

各音程が、各生成元何個分に相当するかを定義する行列

ヴァルとは**ランク１音律の写像行列**と見なせる。

12平均律のpatentヴァル

$$\begin{array}{cccl} \text{2倍音} & \text{3倍音} & \text{5倍音} & \\ \langle 12 & 19 & 28 \mid & \text{半音の数} \end{array}$$

中全音律のマッピング行列

$$\begin{array}{cccl} \text{2倍音} & \text{3倍音} & \text{5倍音} & \\ 1 & 1 & 0 & \text{オクターブの数} \\ 0 & 1 & 4 & \text{完全5度の数} \end{array}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right|$$

マッピング(写像)行列　ヴァルとモンゾの積

例：周波数比15/8→ |-3 1 1>の写像を計算

12平均律

$$\underset{\text{ヴァル}}{\begin{pmatrix} 12 & 19 & 28 \end{pmatrix}} \underset{\text{モンゾ}}{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{\text{半音}}{\begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}}$$

中全音律

$$\underset{\text{マッピング}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}} \underset{\text{モンゾ}}{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{オクターブ} \\ \text{完全5度} \end{array}$$

緩和

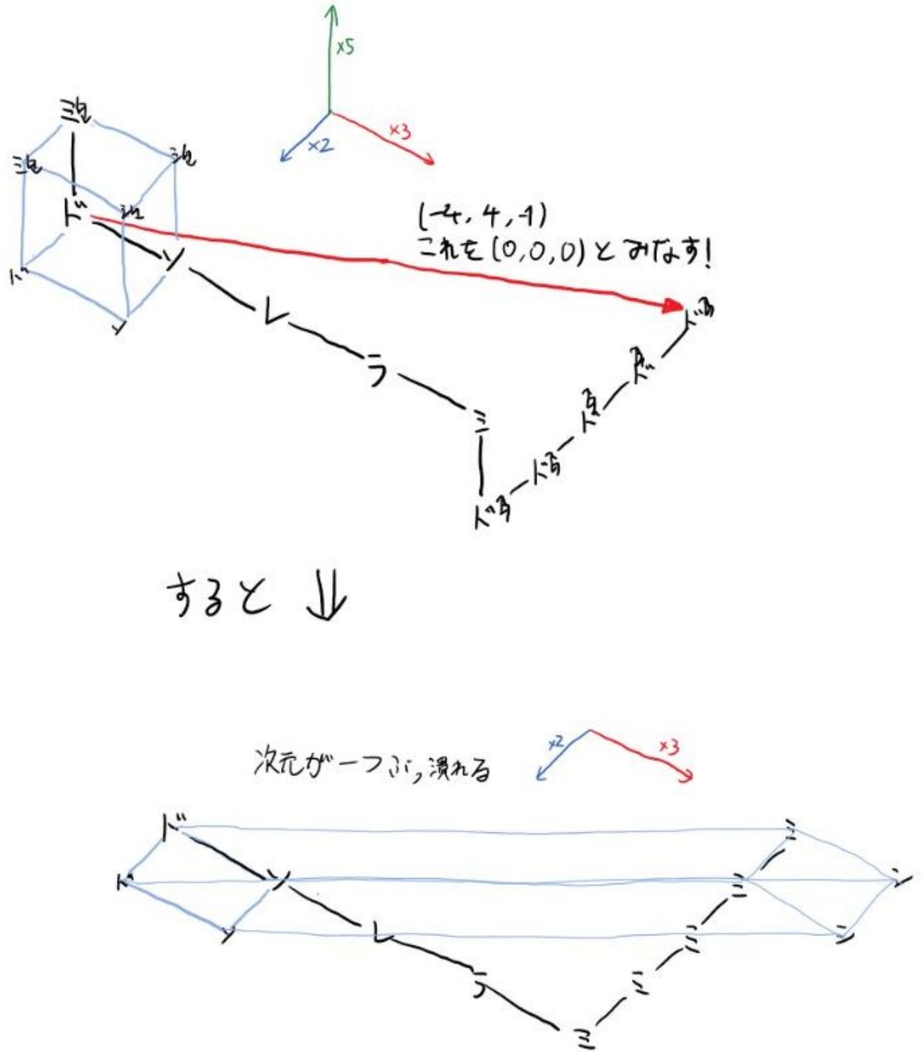
コンマの緩和

どこかの音程が微小な
純正音程を同じ音として見る

このように
音程の「見做し」をする事を
「緩和する」(Tempering out)という

結果として・・・
次元が下がる→ランクが一つ下がる

数学的には・・・
Rankを減らした「線形写像」と見てとれる



コンマの緩和

マッピング行列と微小な音程(コンマ)のモンゾの積がゼロ行列になる
(つまりユニゾンとして扱われる)ときコンマが緩和されている。

12平均律

$$\begin{pmatrix}12 & 19 & 28\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$$

ヴァル　ランク1

モンゾ　ランク3

半音　ランク1

中全音律

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\4\\-1\end{pmatrix}$$

マッピング　ランク2

モンゾ　ランク3

$$= \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

ランク2

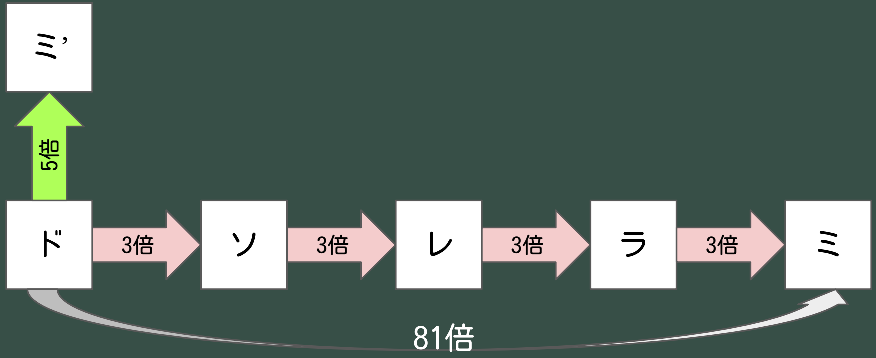
オクターブ

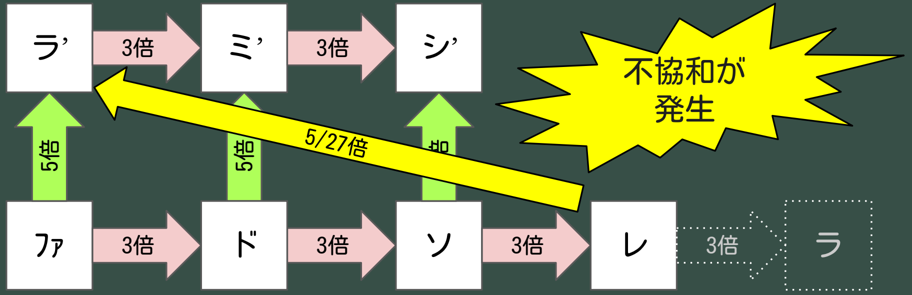
完全5度

マッピング行列の算出
（中全音律の例）

中全音律

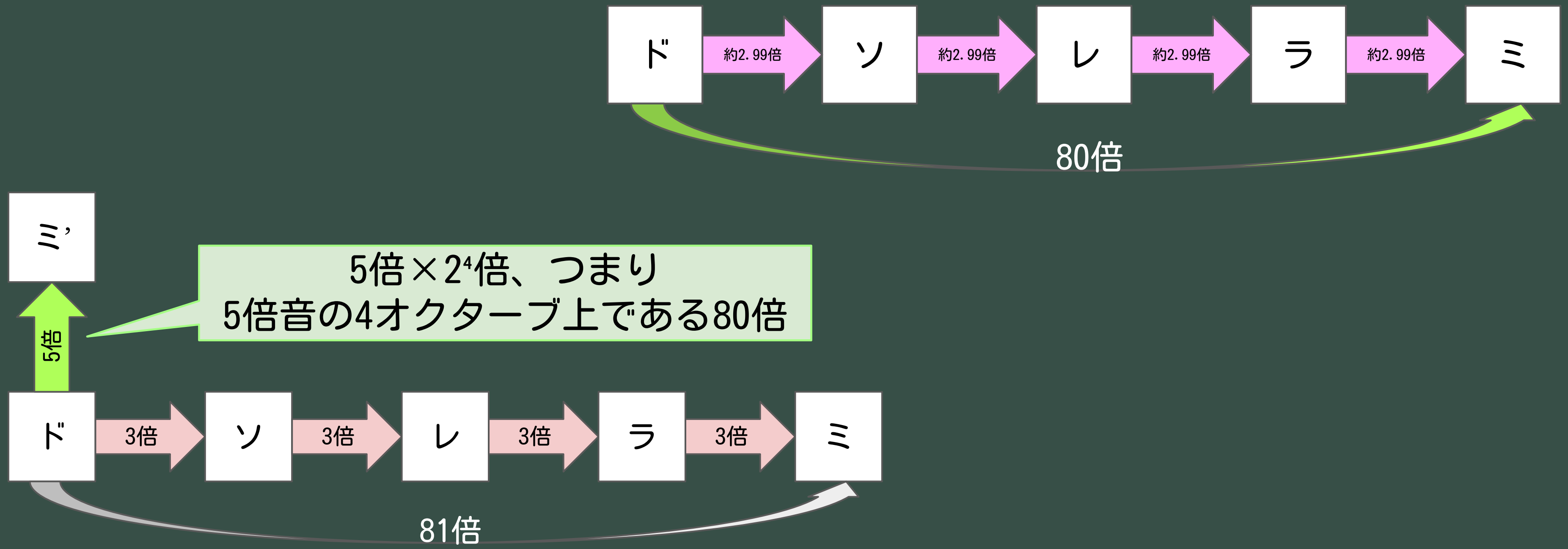
長3度は5/4なのに、5度圏的には3の4乗=81倍
周波数比の大きな不整合のために純正律は“同じキーの中であっても”
不協和になる問題が生じる





中全音律

そこで、81/80という周波数比はごまかす→3倍をやや狭く調整



中全音律の緩和ベクトル

中全音律の類は81/80という周波数比を無視して、
同じ音として取り扱ってしまう！

$$\frac{81}{80} = 2^{-4} \times 3^{4} \times 5^{-1}$$

ゆえにモンゾは

$$\begin{array}{rc} & \text{81/80は} \\ \begin{matrix}\text{2倍音の個数} \\ \text{3倍音の個数} \\ \text{5倍音の個数}\end{matrix} & \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

コンマの緩和を用いた写像行列の算出

中全音律は81/80を緩和する行列

$$
\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{ccc} \text{2倍音は} & \text{3倍音は} & \text{5倍音は} \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{オクターブが} \\ \text{完全5度が} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}
\end{array}
$$

で表せる

を求めたい

コンマの緩和を用いた写像行列の算出

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{2倍音は} & \text{3倍音は} & \text{5倍音は}\end{array} \\ \begin{array}{r}\text{オクターブが}\\ \text{完全5度が}\end{array} & \begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & 1 & b\end{pmatrix}\end{array} \begin{pmatrix}-4\\ 4\\ -1\end{pmatrix} \begin{array}{l}\text{2倍音の個数}\\ \text{3倍音の個数}\\ \text{5倍音の個数}\end{array} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \begin{array}{l}\leftarrow\text{オクターブが}\\ \leftarrow\text{完全5度が}\end{array}$$

この音律で

この周波数比の
音程は

として表現される

コンマの緩和を用いた写像行列の算出

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 \times (-4) + 1 \times 4 - a = 0 \\ 1 \times 0 + 1 \times (-4) - b = 0 \end{cases}$$

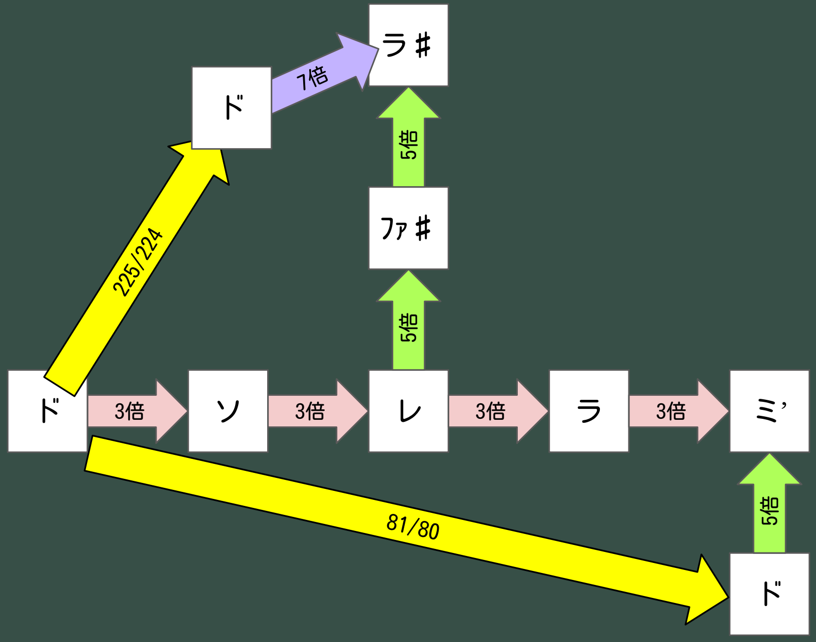
$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 4 \end{cases} \qquad \therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5倍音は、完全5度4個の積み上げで表現可能！

カーネル

セプティマル中全音律

81/80と、225/224をごまかす



カーネル

（緩和されるコンマのモンゾの集まり）

$$\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

セプティマル中全音律のカーネル

$$\frac{81}{80} = 2^{-4} \times 3^{4} \times 5^{-1} \times 7^{0}$$

$$\frac{225}{224} = 2^{-5} \times 3^{2} \times 5^{2} \times 7^{-1}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{81/80は} & \text{225/224は} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{2倍音の個数} \\ \text{3倍音の個数} \\ \text{5倍音の個数} \\ \text{7倍音の個数} \end{array} & \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ゆえに緩和される音程たちは

カーネルからマッピング行列算出

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cccc}\text{2倍音は} & \text{3倍音は} & \text{5倍音は} & \text{7倍音は}\end{array} \\ \begin{array}{r}\text{オクターブが}\\ \text{完全5度が}\end{array} & \begin{pmatrix}1 & 1 & a & c\\ 0 & 1 & b & d\end{pmatrix}\end{array} \begin{pmatrix}-4 & -5\\ 4 & 2\\ -1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{array}{cl} \begin{array}{cc}\text{81/80は} & \text{225/224は}\end{array} & \\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\leftarrow\text{オクターブが}\\ \leftarrow\text{完全5度が}\end{array}\end{array}$$

$$\begin{cases} -4+4-a=0 \\ 4-b=0 \\ -5+2+2a-c=0 \\ 2+2b-d=0 \end{cases}$$

$$a=0, b=4, c=-3, d=10$$

マッピング同士の積

マッピング行列同士の積はマッピング

12EDOの2倍音と完全5度についてのPatentヴァル

$$\left\langle 12\log_2 2 \quad 12\log_2 \tfrac{3}{2} \right| \approx \left\langle 12 \quad 7 \right|$$

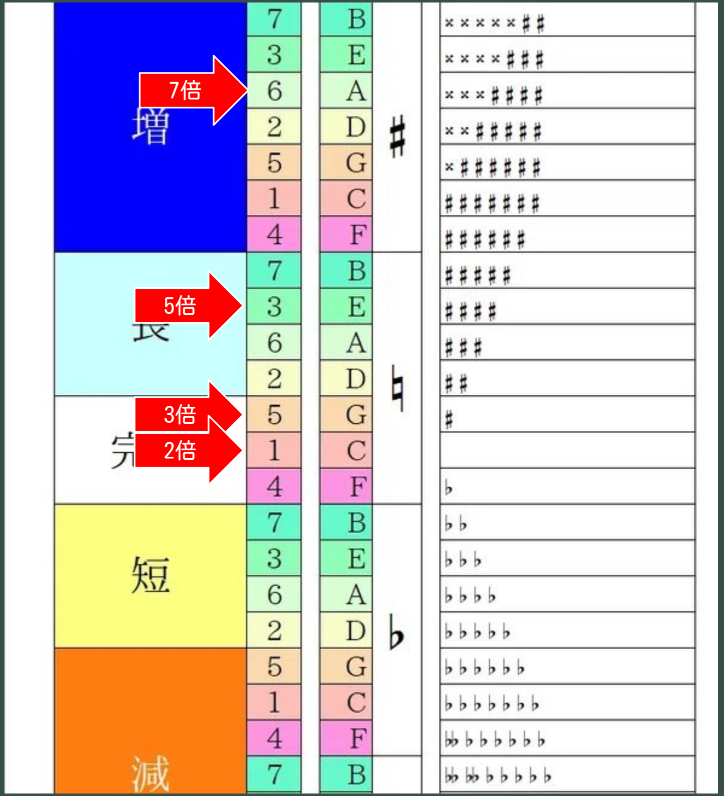
このとき

$$\text{半音} \begin{array}{cc} \text{オクターブは} & \text{完全5度は} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 12 & 7 \end{pmatrix}} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{オク} \\ \text{完5} \end{array} \begin{array}{cccc} \text{2倍音は} & \text{3倍音は} & \text{5倍音は} & \text{7倍音は} \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}} \end{array} = \begin{array}{cccc} \text{2倍音は} & \text{3倍音は} & \text{5倍音は} & \text{7倍音は} \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 12 & 19 & 28 & 34 \end{pmatrix}} \end{array} \text{半音}$$

マッピング行列同士の積はマッピング

3倍音≒完全5度×1　+1オクターブ
5倍音≒完全5度×4
7倍音≒完全5度×10　−3オクターブ

$$
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{cccc} & 3\text{倍} & 5\text{倍} & 7\text{倍} \end{array}
\end{array}
$$



コンマを緩和する音律の判定

緩和判定 12EDOが81/80と225/224を緩和する例

81/80と、225/224をごまかす

12EDOのPatentヴァルとモンゾの積は、

$$\begin{pmatrix}12 & 19 & 28 & 34\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 4 & 2\\ -1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$$

81/80も225/224も0ステップなので緩和されている。

Patentヴァル以外のマッピングのヴァル生成

緩和していない音律で緩和した音律の楽曲を当てはめるなど、
Patentヴァル以外が必要な場合のヴァル算出

例：セプティマル中全音律のカーネルを持つ31EDOの楽曲を34EDOで演奏するには？

34EDOのPatentヴァルは

$$\langle 34 \quad 54 \quad 79 \quad 95 |$$

だが、34EDOの2、3倍音までのPatentヴァルと、
81/80と225/224を緩和する2倍音と3倍音に関するマッピング

$$\begin{pmatrix} 34 & 54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 54 & 80 & 98 \end{pmatrix}$$

実践

$$\frac{81}{80}, \frac{225}{224}, \frac{243}{242}, \frac{66}{65}$$ を緩和する音律がある。

(1) モンゾからカーネルを求めましょう。

(2) 31EDOのPatentヴァル

$$\langle 31 \quad 49 \quad 72 \quad 87 \quad 107 \quad 115|$$

がこれらを緩和できることを(1)のカーネルを用いて確かめてみましょう。

(3) 2倍音と3倍音に関する、ランク2音律のマッピング行列を求めましょう。

(4) (3)のマッピング行列を12EDOの2倍音と3倍音についてのPatentヴァル

$$\langle 12 \quad 19|$$

に写像すると、11倍音と13倍音の表現に必ず微分音が必要となることを確かめてみましょう。

実践

(1)

$$\begin{pmatrix} -4 & -5 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 31 & 49 & 72 & 87 & 107 & 115 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -5 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

実践

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_5 & a_7 & a_{11} & a_{13} \\ 0 & 1 & b_5 & b_7 & b_{11} & b_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -5 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -13 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 4 & 10 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 12 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -13 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 4 & 10 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 19 & 28 & 34 & 41.5 & 44.5 \end{pmatrix}$$

11倍音、13倍音の近似で12EDOの半音単位に端数を生じるため、微分音が必要となる。